Danske elevers udfordringer i matematik

Uffe Thomas Jankvist
AU (DPU) & RUC

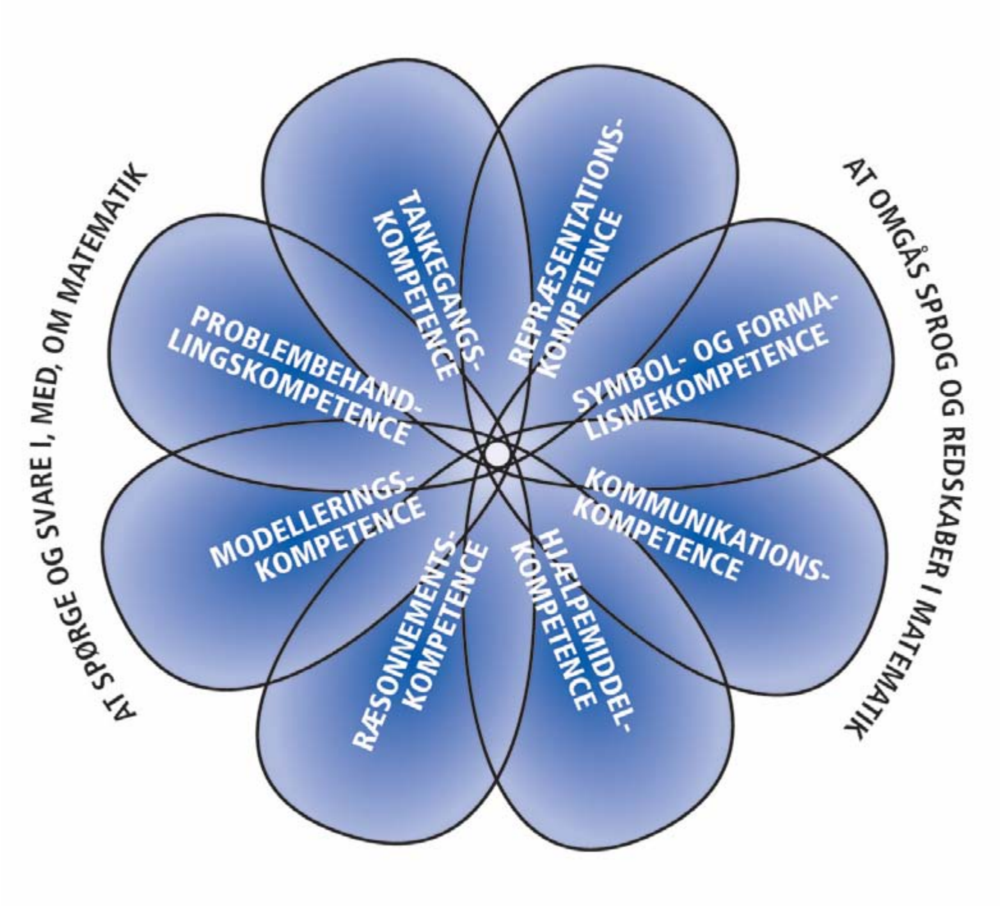
Disposition for de næste 30 min.

- Matematikspecifikke udfordringer – matematikvanskeligheder
- Hvad ved vi fra PISA – set fra et fagdidaktisk synspunkt?
- Hvad ved vi fra RUC's matematikvejlederuddannelse til gymnasiet?
  - Eksempler på matematikvanskeligheder i gymnasiet
- Kort om at være matematikvejleder i gymnasiet
- Om brobygning mellem folkeskole og gymnasium

Om matematikvanskeligheder

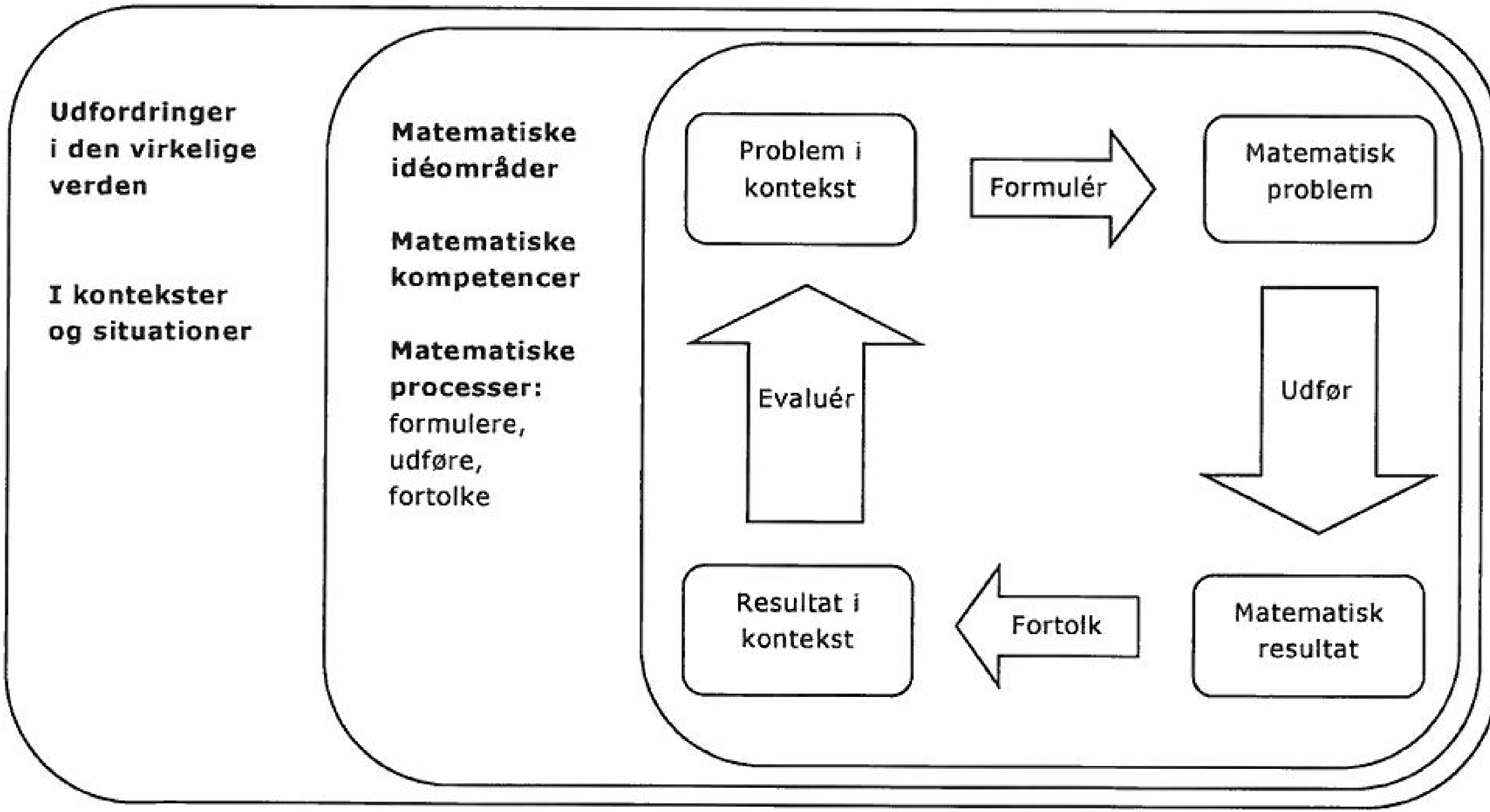
- Det er vigtigt at skelne mellem på den ene side: **dyskalkuli**, som ofte regnes for at være mere neurologisk betinget;
- og egentlige **matematikvanskeligheder**, som bl.a. omfatter følgende:
  - Vanskeligheder med matematisk begrebsdannelse
  - Vanskeligheder med matematisk ræsonnement og bevis
  - Vanskeligheder med matematisk problemløsning
  - Vanskeligheder med matematisk modellering og modeller
  - Vanskeligheder med sprog i relation til matematik
  - Osv.

Matematik-kompetencer



- (Niss & Jensen, 2002)

Matematik i PISA



- Lindenskov & Jankvist (2013)

PISA's ”Mathematical literacy”

- … en persons formåen til at **formulere**, **udføre** og **fortolke** matematik i en mangfoldighed af sammenhænge. Det omfatter at kunne ræsonnere matematisk og gøre brug af matematiske begreber, procedurer, kendsgerninger og redskaber til at beskrive, forklare og forudsige fænomener. Det er en hjælp til at erkende den rolle, som matematik spiller i verden og til at foretage og træffe velfunderede vurderinger og beslutninger som konstruktive, engagerede og reflekterende borgere

- (OECD, 2013, s. 25, egen oversættelse)

PISA 2012: matematiske idéområder

- For danske elever går det bedst mht. ”**størrelser**” og ”**usikkerhed og data**”
- Danske elever klarer sig på det jævne mht. ”**forandringer og sammenhænge**”
- Danske elever har sværest ved ”**rum og form**”

PISA 2012: matematiske processer

- Danske elever er over gennemsnittet mht. at ”**fortolke**”
  - dvs. at af-matematisere; oversætte det matematiske resultat tilbage til den ikke-matematiske kontekst
- Danske elever er gennemsnitlige mht. at ”**formulere**”
  - dvs. at matematisere; at bringe noget fra en ikke-matematisk kontekst på matematikform
- Danske elever er under gennemsnittet mht. at ”**udføre**’
  - består i høj grad i at problemløse inden for det matematiske domæne, dvs bl.a. at ”regne”; anvende korrekte formler i korrekt sammenhæng; flytte rundt i formler; mv. ...

Et eksempel på en PISA-opgave

- Et pizzeria serverer to runde frokostpizzaer af samme slags og tykkelse, men i forskellig størrelse. Den mindste har en diameter på 30 cm og koster 30 kr. Den største har en diameter på 40 cm og koster 40 kr.
- Hvilken pizza giver mest for pengene?
- Vis, hvordan du kom frem til dit resultat.

- [M154Q01; frigivet efter PISA 2006]

Kode-guide til denne PISA-opgave

- **QUESTION INTENT**: Applies understanding of area to solving a value for money comparison

- **Code 2**: Gives general reasoning that the surface area of pizza increases more rapidly than the price of pizza to conclude that the larger pizza is better value.
  - The diameter of the pizzas is the same number as their price, but the amount of pizza you get is found using diameter^2 , so you will get more pizza per zeds from the larger one
- **Code 1**: Calculates the area and amount per zed for each pizza to conclude that
- the larger pizza is better value.
  - Area of smaller pizza is $0.25 \times \pi \times 30 \times 30 = 225\pi$; amount per zed is 23.6 cm^2 area of larger pizza is $0.25 \times \pi \times 40 \times 40 = 400\pi$; amount per zed is 31.4 cm^2 so larger pizza is better value

- **Code 8**: They are the same value for money. (This incorrect answer is coded separately, because we would like to keep track of how many students have this misconception).

- **Code 0**: Other incorrect responses OR a correct answer without correct reasoning.
- **Code 9**: Missing.

Svar af gym.elever i 2013 (mat.vejl. RUC)

- ”Man får 1 cm pizza for 1 kr.”
- [oftest forekommende fejlsvar!]

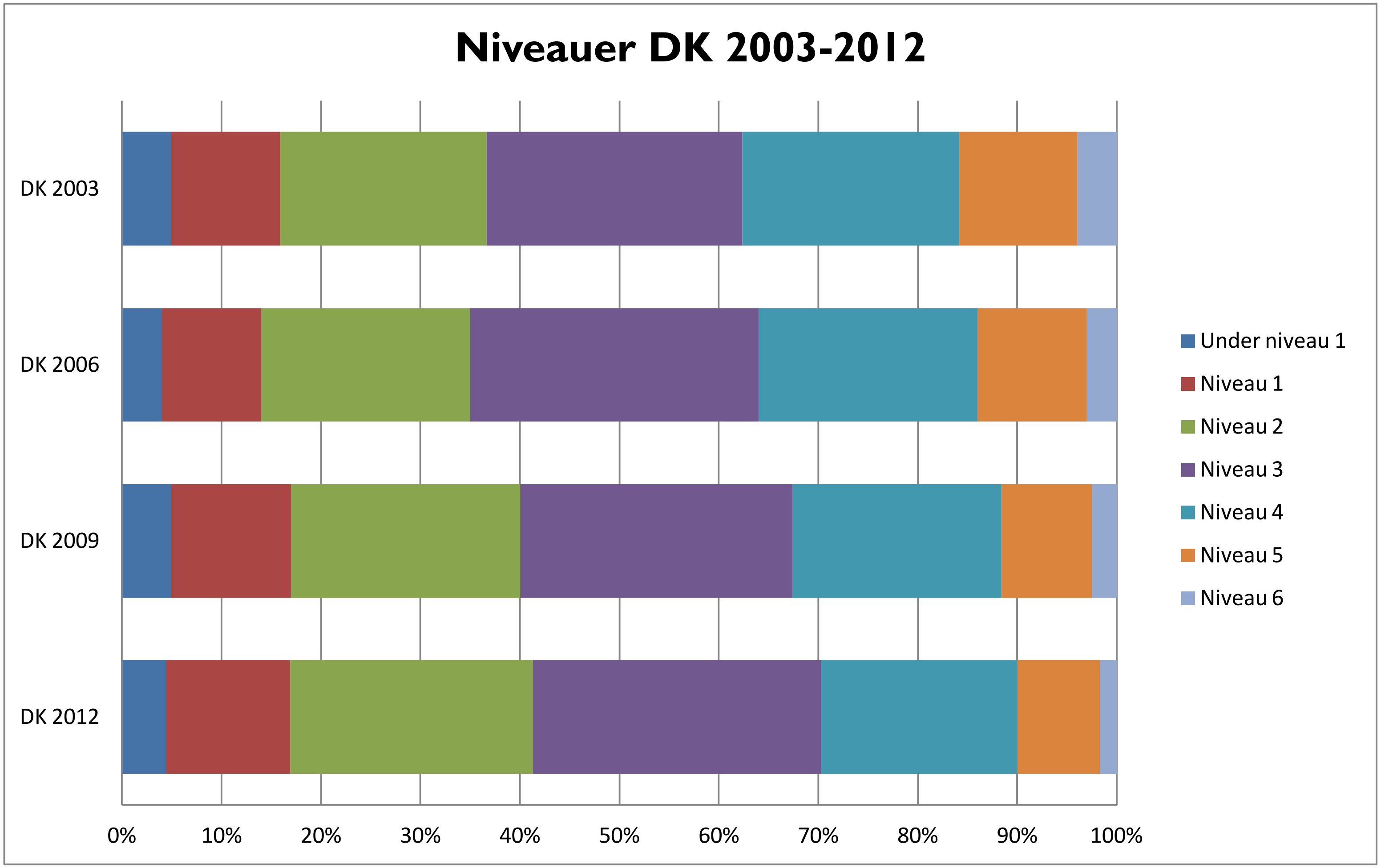
- ”Ingen af dem giver mest for pengene, da man betaler 1 kr. per 1 cm i diameter pizza for dem begge.”

- ”Der er ingen forskel? En pizza koster 10 kr pr diameter. Hvis du skal have den til 40 kr, kan det godt være du betaler 10 kr mere end den pizza til 30 kr, men du får så også 10 diameter mere pizza ☺”
- [2g elev på Borupgaard Gymnasium]

Niveauer i forhold til PISA point

- Niveau 6: Score > 669,3
- Niveau 5: 669,3 ≥ Score > 607,0
- Niveau 4: 607,0 ≥ Score > 544,7
- Niveau 3: 544,7 ≥ Score > 482,5
- Niveau 2: 482,5 ≥ Score > 420,1
- Niveau 1: 420,1 ≥ Score > 357,8
- Niveau 0: 357,8 ≥ Score

Niveaufordeling i Danmark



- Lindenskov & Jankvist (2013)

Så hvordan ligger landet?

- Der er kommet flere elever i gymnasiet end nogensinde før
- Og skal vi tro på PISA 2012 så må der være kommet færre af de dygtige
- Dvs. at der må være langt flere elever fra mellemniveauet (i PISA)
- Samtidig lader det til, at mange af dem der kommer i gymnasiet er vældig udfordrede ift. at "udføre", herunder at regne og problemløse

- Qua mat.vejl.udd. til gym. kan vi endda sige noget mere præcist om hvor (nogle af) "hundene ligger begravet" for disse elever!

Brøker og division

$$\frac{a}{b} \qquad\qquad a : b$$

- Elever opfatter brøkstreger og : som noget forskelligt når der divideres
  - Brøker når det handler om noget der skal spises (pizzaer, kager, osv.)
  - Division er noget med penge, flasker osv.

- (Matematikvejledere fra Næstved Gymnasium)

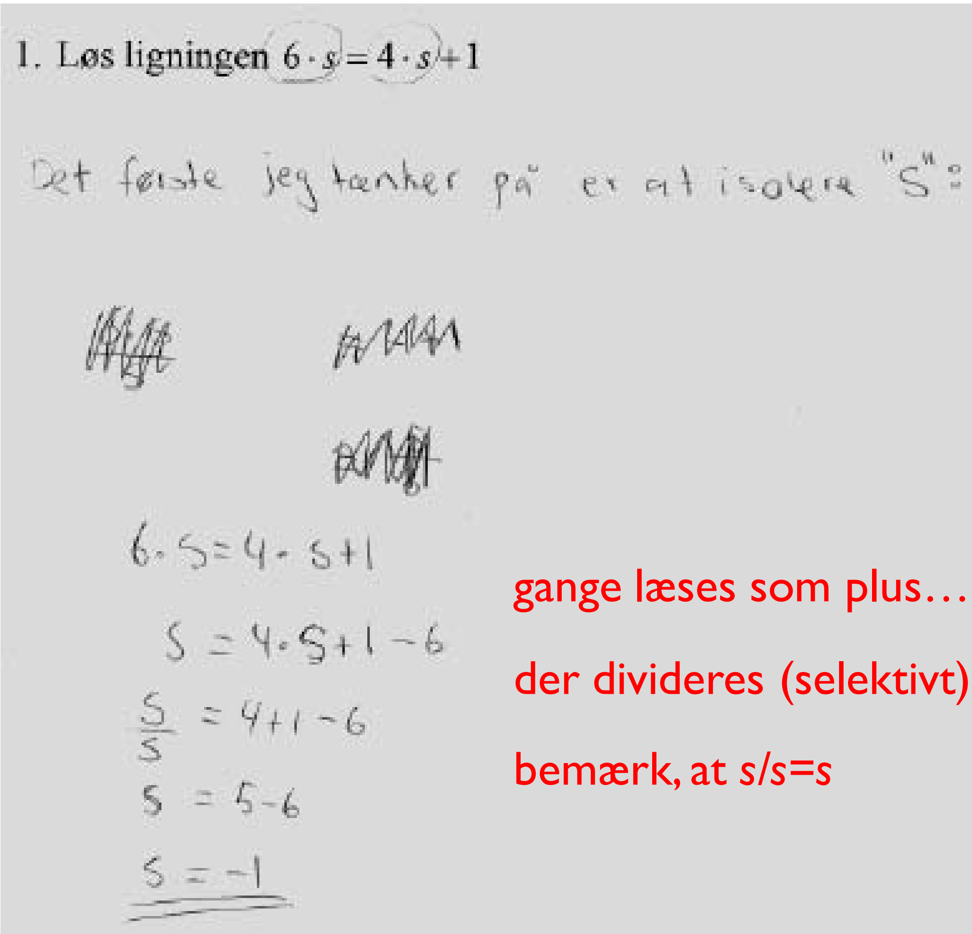
I forhold til ligninger

Problemer med at forstå:

- hvad en ligning er;
- hvad en løsning er;
- hvad lighedstegn betyder;
- løsningsstrategi;
- negative tal, brøker, osv. giver ofte besvær... enten hver for sig eller i diverse kombinationer...

”Regler” som at ”rykke rundt” og ”flytte over” er ofte uheldige, hvis de ikke ledsages af relationel forståelse...

Ligningsløsning


1. Løs ligningen $6 \cdot s = 4 \cdot s + 1$

Det første jeg tænker på er at isolere "S":

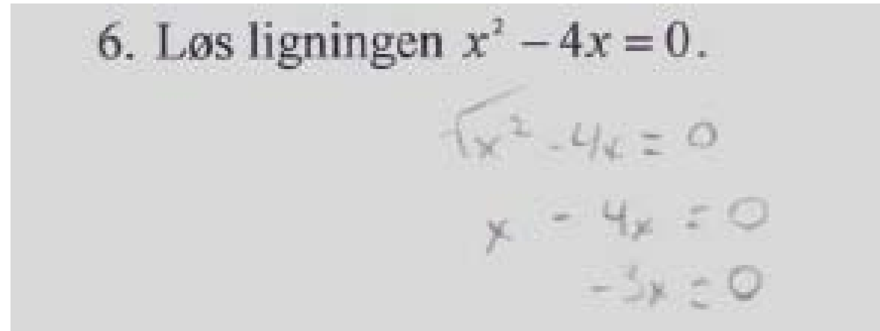
$6 \cdot s = 4 \cdot s + 1$

$s = 4 \cdot s + 1 - 6$

$\frac{s}{s} = 4 + 1 - 6$

$s = 5 - 6$

$s = -1$


6. Løs ligningen $x^2 - 4x = 0$.

$\sqrt{x^2} - 4x = 0$

$x - 4x = 0$

$-3x = 0$

det at tage kvadratrod bliver til et 'kirurgisk' indgreb der kan udføres på udvalgte besværlige led…

gange læses som plus…

der divideres (selektivt) igennem med s…

bemærk, at s/s=s

- (Schou & Pihl, 2014)

Ligningsløsning og talbegreb

- Problemer med variabel-begreb:
  - "Jeg kan ikke sige 3x-1, fordi jeg ikke kan trække 1 fra x. Man kan ikke trække et tal fra et bogstav."
- Elev om 24/6:
  - "Det ved jeg ikke, når det er så store tal."
- At en betydelig snublesten for løsning af ligninger kan være manglende udvikling af talbegrebet!
- (Christensen & Mortensen, 2014)

Det farlige 0

$$\frac{a^5}{a^5} = 0 \qquad \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 0$$

- ”0” opfattes ikke som et egentlig tal, på lige fod med andre tal, men derimod som en ”pladsholder” for fravær.
- (Niss & Jankvist, IMFUFA-seminar, 2014)

Eksempel

$$\frac{2}{x+1} = 3$$

$$2 = 3x + 1 - 1$$

$$2 + 1 = 3x$$

$$\boxed{\frac{3}{3}} = \frac{3x}{3}$$

$$\boxed{0} - x$$

 (Myrup & Nielsen, 2014)

Et bevis-eksempel

Det følgende skal forestille et bevis for at ethvert tal er lig med 0.

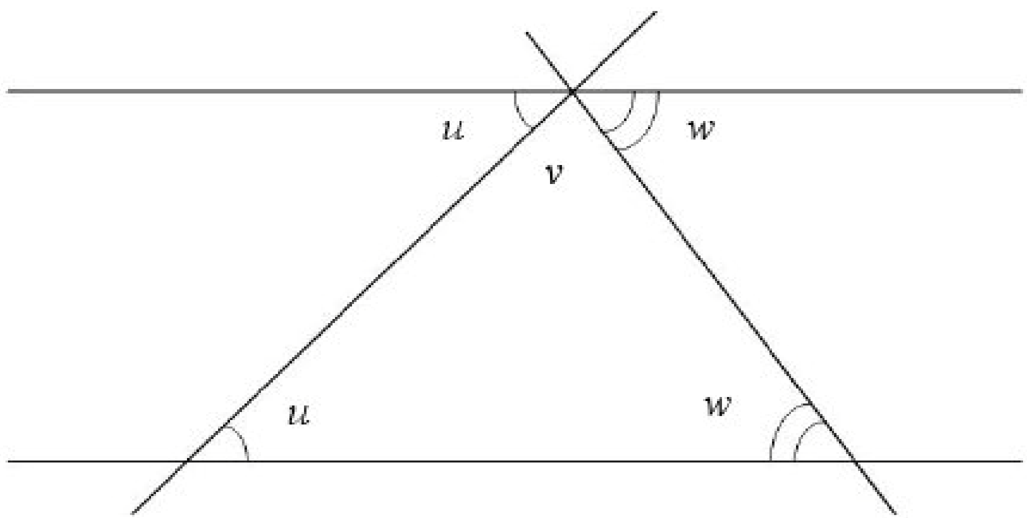
”Vi ser på et vilkårligt tal a og sætter b=a.
Ved at gange med a på begge sider af lighedstegnet får vi $ab=a^2$.
Så kan vi udregne $a\cdot(b-a) = ab - a^2 = 0$ (da vi har $ab = a^2$).
Da 0 gange hvad som helst (fx b-a) er 0, er $0 = 0\cdot(b-a)$,
som sættes ind ovenfor, så vi får $a\cdot(b-a) = 0 = 0\cdot(b-a)$.
Nu kan vi dividere med b-a på begge sider af lighedstegnet.
Tilbage står a = 0. Da a var vilkårligt valgt er ethvert tal lig med 0.”

a) Er det sandt, at ethvert tal er lig med 0? Ja: Nej: Jeg kan ikke svare:
b) Er det anførte bevis korrekt? Ja: Nej: Jeg kan ikke svare:
c) Hvis du mener, at det anførte bevis er ukorrekt, hvad er så galt med det?

Et andet bevis-eksempel

Nedenstående figur udgør et bevis for at en trekants vinkelsum altid er 180 grader, hvilket ses ved at trekantens vinkelsum er *u*+*v*+*w*, den samme sum som ved den øverste linje, hvor summen klart er lig 180.

- Har vi bevist at alle trekanter har en vinkelsum på 180 grader? Ja: Nej: Jeg kan ikke svare:
- Eller bliver vi nødt til at måle på de konkrete trekanter, som vi betragter? Ja: Nej: Jeg kan ikke svare:



RUC: en mat.vejleders rolle i gymnasiet

- I gymnasiet bliver en matematikvejleders rolle at finde ud af præcis, hvori en elevs vanskelighed består

- Og så at sætte ind overfor denne ved design af en målrettet og matematikdidaktisk, forskningsbaseret intervention

- Der er altså *ikke* som sådan tale om at vejlede kollegaer!
- Men om at hjælpe de elever, som forsøger og gerne vil lære matematik, men for hvem 'det ikke sner' – og dem er der typisk et par stykker af i hver gymnasieklasse…

Om brobygning

- En langt større dialog mellem matematiklærere i folkeskolen og matematiklærere i gymnasieskolen synes påkrævet

- En central faktor omhandler også de forestillinger (beliefs) om faget matematik som elever udstyres med

- Med den store procentdel af en ungdomsårgang der fortsætter i gymnasiet, er der brug for en:
  - ”forventningsafstemming” mellem skole og gymnasium; og
  - afstemning af ”den matematiske kultur” i de to institutioner

En opfordring

- Det var oplagt om det var matematikvejledere fra de to institutioner der var forgangsmænd og -kvinder i denne dialog!
- Så hermed en opfordring til at 'åbne op' for et større samarbejde på tværs af institutionerne!

- I første omgang f.eks. ved at invitere matematikvejledere og/eller matematikundervisere fra jeres aftagergymnasier på besøg i matematiktimerne i folkeskolen
- Og ved at invitere jer selv på besøg hos dem!

Et sidste eksempel…

- Hans kan gå fra Roskilde Station til Roskilde Domkirke på 6 minutter. Grethe skal bruge 8 minutter.
- Hvor lang tid tager det, hvis de følges ad?
- Begrund dit svar.

Eksempler på gym.elevers svar…

- ”6 min., hvis Hans tager Grethe på ryggen. Dog kan det tage kortere tid, hvis de løber.”
- ”6 min. fordi Hans viser Grethe smutvejene.”

- ”7 minutter” [oftest forekommende fejlsvar!]
- ”… men kun hvis Hans er god til at motivere Grethe.”

- ”Mindst 8 min., afhængigt af om Hans bor på vej til Domkirken, eller om Grethe skal gå en omvej, eller om de mødes på halvvejen.”

- "Da jeg antager, at dette er i rask gang ud fra udtrykket "kan" vil jeg formode, at de går distancen på omkring 9-10 minutter. Da de undervejs højst sandsynlig kommunikerer og andet der sløver hastigheden grundet menneskets ringe evne til at multitaske.”
- ”14 min. – lægger 8+6 sammen.”

Tak for jeres opmærksomhed!