Hvordan kan matematikdidaktisk forskning bidrage til udvikling af matematikundervisningens praksis?

Morten Blomhøj
IMFUFA, INM, RUC
Matematikvejlederkonferencen 31.9.2017

Plan

1. Praksis – teori forholdet i matematikdidaktik
2. Hvad kan forskningen bidrage med?

2.1 Metoder til samspil mellem praksis og forskning

2.2 Teorier om matematikundervisning og -læring

3. Muligheder og vilkår for samspil mellem udvikling af praksis og matematikdidaktisk forskning
4. Vision om et dansk center for matematikdidaktik

Genstandsfeltet for matematikkens didaktik

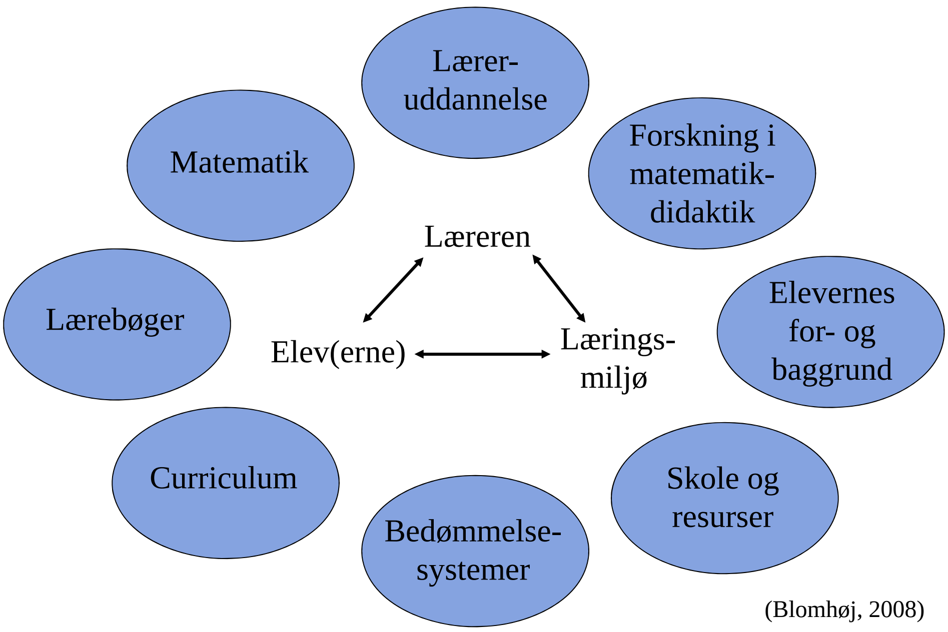
Matematikkens didaktik er det videnskabelige arbejdsfelt, der søger at bestemme, karakterisere og forstå de fænomener og processer, der indgår - eller kun indgå - i matematikundervisning og -læring. Sigtet er at klarlægge mulige årsags-sammenhænge med henblik på at udvikle og forbedre matematikundervisning.

Tre centrale problemfelter i forskningen:

- Begrundelsesproblemet
- Mulighedsproblemet
- Implementationsproblemet

(Niss, 1993) (Blomhøj, 2016)

Genstandsområdet for matematikdidaktisk forskning



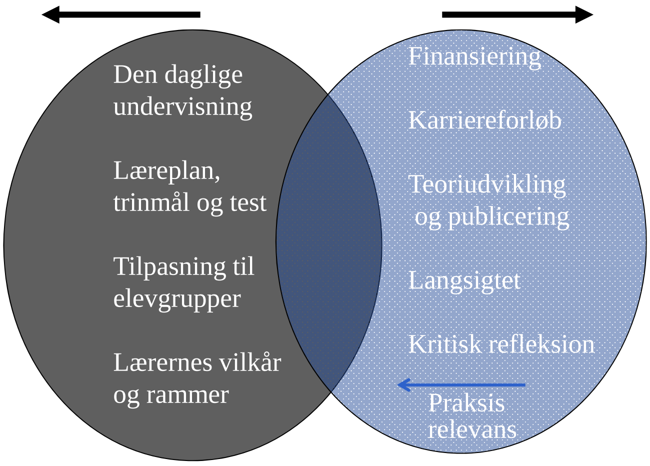
(Blomhøj, 2008)

Tre bøger fra Frydenlund

De to sidste er fra RUC's Matematikvejlederuddannelse for gymnasielærere, der har fokus på elevers læringsvanskeligheder. Netværk med omkring 60 uddannede matematikvejledere.

Rum for samspil mellem praksis og forskning

Systemkrav til praksis   Krav til forskningen



Syv anbefalinger fra rapporten: Fremtidens matematikundervisning i folkeskolen

I: Matematiklæreres professionelle identitet, herunder grund-, efter- og videreuddannelse

II: Ressourcepersoner, ressourcecentre

III: Matematikdidaktisk forskning og nyttiggørelse heraf

IV: Officielle bestemmelser for og beskrivelser af faget matematik i folkeskolen

V: Matematikundervisningens tilrettelæggelse og materialer

VI: Evaluering og evalueringskultur i matematikundervisningen

VII: Bedre overgang til ungdomsuddannelserne

(Undervisningsministeriet, 2006, s. 35-36)

2. Hvad kan forskningen bidrage med?

2.1 Metoder til udvikling af undervisningspraksis

- Teorien om didaktiske situationer (TDS)
- Antropologisk teori om det didaktiske (ATD)
- Realistisk matematikundervisning (RME)
- Lektionsstudier (Mogensen, 2015) , (Østergaard, 2015)
- Didaktisk modellering – SOS-projektet
- Undersøgende matematikundervisning (IBME)
- Matematisk modellering
- …

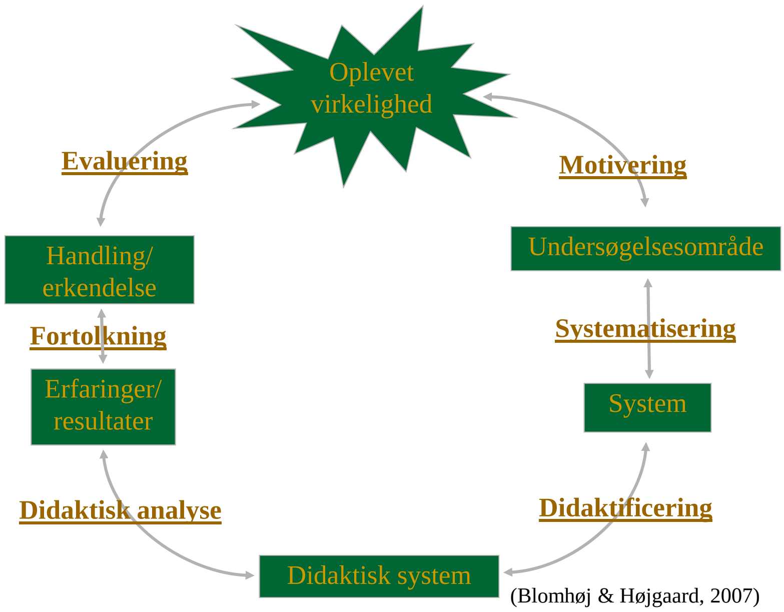
2. Hvad kan forskningen bidrage med?

2.2 Teorier om matematikundervisning og -læring

- Kompetencebeskrivelse af matematikbeherskelse
- TDS; ATD og RME
- Kritisk matematikundervisning
- Vanskeligheder ved tilegnelse af matematiske begreber – lineær funktion som eksempel
  - Repræsentationernes betydning
  - Proces og objekt aspekter af matematiske begreber
- It's rolle i matematikundervisning og –læring
- …

RUC Roskilde Universitet Roskilde University www.ruc.dk

Didaktisk modellering – en model for forskningsbaseret udviklingsarbejde



(Blomhøj & Højgaard, 2007) D7

Forløb om talfølger og symbolbehandling i 9. kl.

På 9. klassetrin omfatter symbolbehandlingskompetence at kunne:

- udføre simple algebraiske operationer på givne symboludtryk.
- vælge og følge en hensigtsmæssig fremgangsmåde for løsning af ligninger og uligheder.
- kontrollere mulige løsninger til ligninger og uligheder.
- forudse og kontrollere resultatet af simple algebraiske operationer på symboludtryk.
- lave hensigtsmæssige grafiske repræsentationer af symboludtryk.
- undersøge symbolske udtryk ved at lave tabeller eller andre talmæssige repræsentationer.

Og at kunne:

- opstille simple symboludtryk til beskrivelse af sammenhænge præsenteret i almindeligt sprog.
- vælge hensigtsmæssigt mellem ækvivalente algebraiske udtryk i forhold til et givet formål.
- læse mening ind i et algebraisk udtryk ved at fortolke de indgående variable og deres relationer i forhold til en given eller selvvalgt kontekst.

Kun en begrænset del af disse aspekter ved symbol-behandlingskompetence indgår i grundskolens afsluttende prøver og i de mest anvendte lærebøger.

I projektet blev kompentencen vurderet som et nødvendigt grundlag for gymnasiets matematikundervisning, men samtidigt som noget mange elever har problemer med.

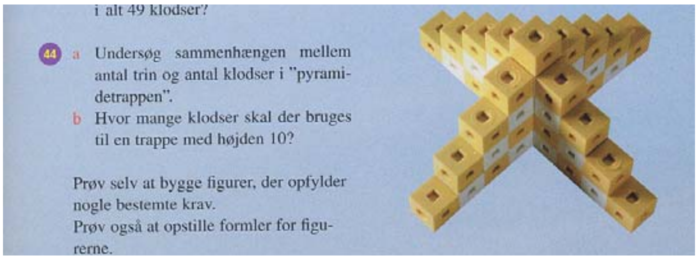
Konstruktion af episoder

1. Observation af undervisningsforløb som deltagende observatør.
2. Interview af og/eller dialoger med udvalgte elever i tilknytning til de observerede forløb.
3. Konstruktion af episoder.
4. Didaktisk analyse af episoderne.
5. Diskussion og genfortolkning af episoderne i dialog med lærere og andre forskere.
6. Design af læringsmiljøer i samarbejde med lærere.

(Blomhøj, 2006)

Konstrueret dialog til pyramidetrappen

(opgave 44 Matematrix 8, side 33).



Dialogen er tænkt som illustration af, hvordan den mest udviklede symbolbehandlingskompetence på 9. klassetrin kan komme til udtryk i forbindelse med denne opgave.

(Blomhøj & Højgaard Jensen, 2007a)

L: Hvad laver I?
E1: Opgave 44
L: Den med trappepyramiden?
E2: Ja, den er lidt svær.
L: Har I prøvet at lave en tabel over hvor mange klodser, der skal bruges til en trappe med forskellige antal trin.
E1: Nej, ikke endnu. Vi kan ikke rigtig komme i gang.
L: Hvad hvis der skal være nul trin på trappen?
E2: Nul trin?
L: Ja, nul trin.
E2: Så er der jo ingen trappe.
L: Ja, det er rigtigt. Hvor mange klodser skal der så bruges?

E1: Nul klodser (lidt tvivlende).
L: Ja, nul. Det er rigtigt. Hvad så med ét trin?
E2: Så skal der vel bruges én klods.
L: Ja, nemlig. Så har I to tal til jeres tabel. Prøv om I kan finde ud af hvordan det så udvikler sig?
Læreren går og kommer tilbage efter nogle minutter.
L: Hvordan går det?
E1: Der skal bruges 6 til to trin og 15 – tror vi – til tre trin.
Eleverne har lavet tabellen:

Trin	0	1	2	3
Klodser	0	1	6	15

L: Kan I se systemet?
E2: Nej, ikke rigtigt.
L: Så prøv at tage den med tre trin, og se på lagene.

Efter nogle minutter har eleverne tegnet de tre lag:

L: Det er fint. Hvor mange klodser er der så i hvert af de tre lag?

E2: 1, 5 og 9.

L: Ja, og hvad så i det næste lag?

E1: Der må være 4 gange 3 plus 1. Det er 13.

L: Det er helt rigtigt, hvordan ser du det?

E1: Der er 4 rækker med 3 og så den i midten.

L: Så kan I sikkert også lave en formel, der viser hvor mange klodser, der er i det i'te lag? I kan kalde antallet af klodser i det i'te lag for L_i .

E2: Det må være $4 \cdot i + 1$.

L: Prøv om den passer for det 3. lag, altså med i=3?

E2: 4•3 + 1. Det er jo 13. Det passer ikke.

L: Nej, det gør det ikke. Hvordan kan det være?

E1: Det er det næste lag. Det 4. lag har 13 klodser.

L: Ja, hvad er der så galt med formlen?

E2: $L_{i+1} = 4 \cdot i + 1$.

L: Ja, det er nemlig helt rigtigt. Kan I så også opstille en formel for den trinvise udvikling. Hvis vi siger vi kender antallet af klodser i trappen med i lag og kalder det for a_i. Hvor mange er der så i trappen med i+1 lag? Prøv først at sige det med ord.

E1: Dem der er i forvejen plus det nye lag.

L: Ja, netop. Kan I også skrive det som en formel.

E2: $a_{i+1} = a_i + 4 \cdot i + 1$.

L: Prøv om den virker. Og så kan I taste den ind i jeres regneark.

Tre hovedfaser i undersøgende forløb

1. Iscenesættelse af forløbet over for eleverne
   - overdragelse af udfordringen/problemet til eleverne
   - etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
   - formidling af de tidsmæssige og praktiske rammer
   - klargøring af produktkrav og bedømmelsesform
2. Elevernes selvstændige undersøgende arbejde
   - tilstrækkelige tid, frihed og støtte til, at eleverne kan arbejde selvstændigt med problemet
   - støtte og udfordring gennem dialog
   - forberedelse gennem konstruktion af dialoger
3. Fælles refleksion og faglig læring
   - erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og faglig viden og faglige pointer søges fællesgjort

(Blomhøj, 2013 og 2016)

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

I dag er det centicubens fødselsdag
Hurra, Hurra, Hurra
Så vokser den med en igen,
og du skal være dens bedste ven,
og male den på hver af de 6 flader

Idé og tekst: Mikael Skånstrøm

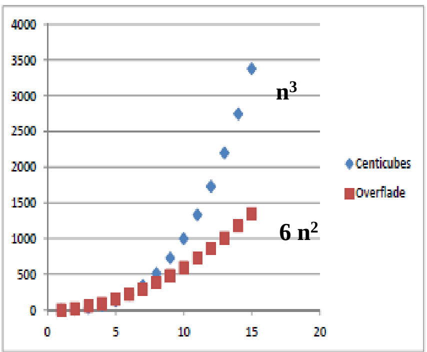
RUC Roskilde Universitet Roskilde University

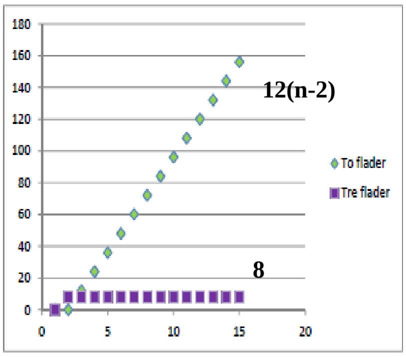
Centicube som 4-årig

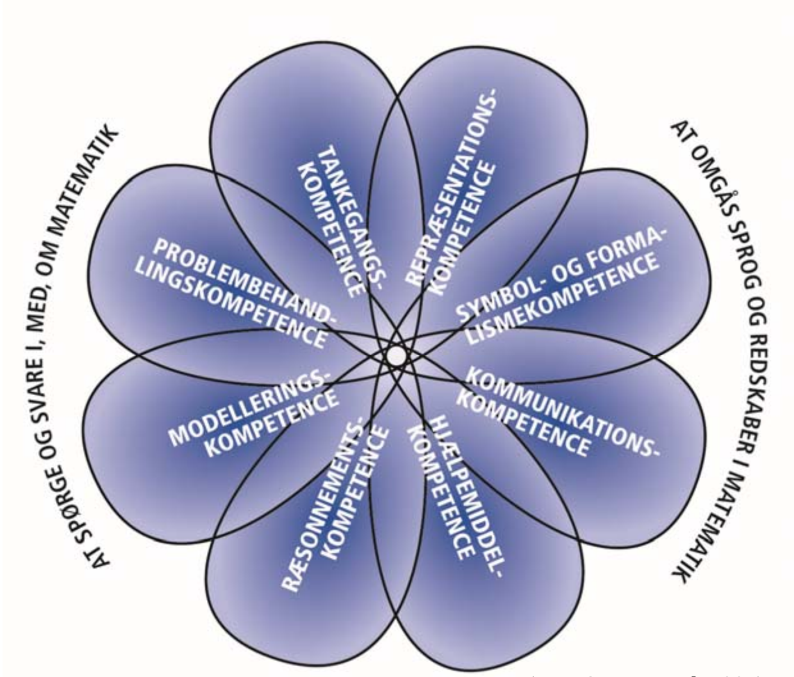
Centicube som 5-årig

Eleverne bruger regneark til at kontrollere, tegne grafer for og fortolke deres resultater matematisk.

År	Cubes	Overflade	0 flader	1 flade	2 flader	3 flader
n	n^3	$6n^2$	$(n-2)^3$	$6(n-2)^2$	$12(n-2)$	8







(Niss & Højgaard, 2002) D8

Lineær funktion er vigtig for sammenhængen

- Det er her eleverne for første gang møde formalisering af sammenhænge mellem to variable (7. kl.).
- Der bygges videre på begreber om variabel, ligning og koordinatsystem.
- Der arbejdes for første gang med kontinuerte variable.
- Der arbejdes med algebraiske repræsentationer i form af ligninger med to variable ($y = ax + b$) , og deres sammenhænge med tabeller, grafer og sproglige repræsentationer.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Lineær funktion er vigtig for sammenhængen

- Funktionsbegrebet introduceres, repræsenteres symbolsk ($y = f(x)$) og anvendes i forskellige sammenhænge.
- Emnet giver mulighed for at eleverne kan arbejde med matematisk modellering, og har mange anvendelser i andre fag og i forhold til elevernes erfaringer.
- Det er vigtigt som grundlag for den fortsatte teori-bygning i matematik. Det gælder i særlig grad differential- og integralregning.
- Lineære funktioner volder eleverne læringsmæssige vanskeligheder ved overgangen fra grundskole til gymnasium.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Trinmål 7.-9. klasse for algebra og funktioner

Fase 3 (Ligninger): Eleven kan opstille og løse enkle ligningssystemer og har viden om grafisk løsning af enkle ligningssystemer.

Fase 3 (Formler og algebra): Eleven kan sammenligne algebraiske udtryk og har viden om regler for regning med reelle tal.

Fase 1 (Funktioner): Eleven kan anvende lineære funktioner til at beskrive sammenhænge og forandringer og har viden om repræsentationer for lineære funktioner

Fase 2 (Funktioner): Det samme for (simple) ikke-lineære funktioner!

www.ffm.emu.dk

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

En model for dannelse af matematiske begreber

Udviklet af Anna Sfard (1991).

A. Procesforståelse går forud for objektforståelse.

B. Processen forløber gennem tre faser:

(1) Internalisering

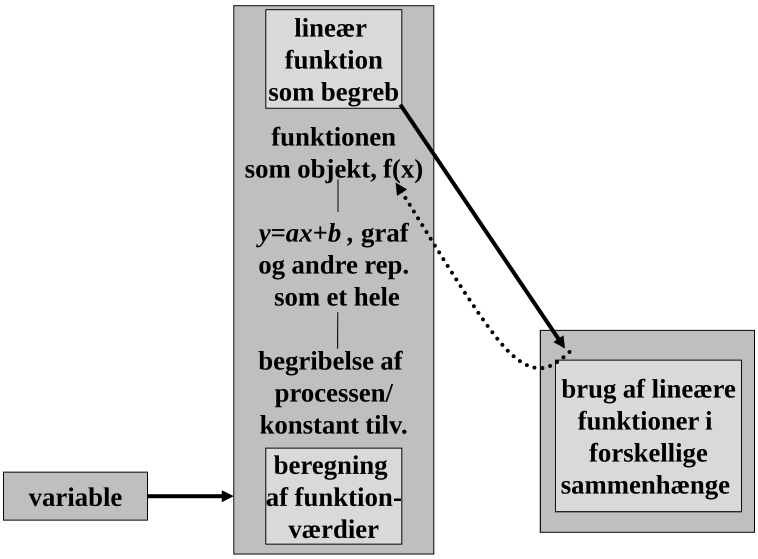
(2) Kondensering

(3) Tingsliggørelse

C. Tilegnelse af et matematisk begreb omfatter både proces og objekt forståelse og muligheden for at skifte mellem dem. Proces og objekt aspekterne kan ikke udvikles samtidig - de er komplementære i læreprocessen.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Dannelse af et begreb om lineær funktion



Sfard (1991)

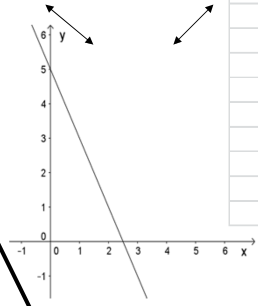
RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Matematiske begreber og deres repræsentationer

En lineær funktion:
(objekt)

Dens repræsentation
(tegn/symbol)

y = -2x+5, $x \in \mathbf{R}$

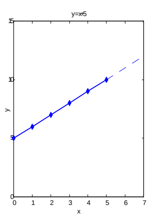
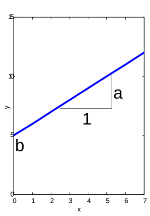


x	y
-4	13
-3	11
-2	9
-1	7
0	5
1	3
2	1
3	-1
4	-2

Lineær funktion
(begreb)

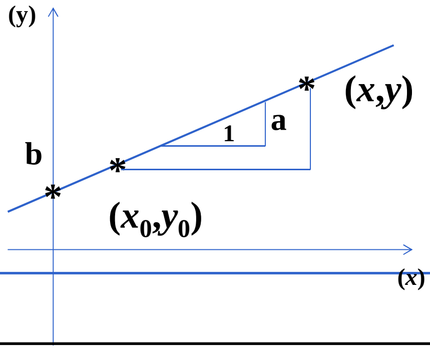
(Steinbring, 1989, 2005)

Proces og objekt repræsentationer af lineære funktioner

Repræsentationsform	Sproglig	Numerisk	Algebraisk	Grafisk
Proces	Jeg er fem år ældre end min bror. y fås ved at gange med *a* og lægger *b* til.	y-værdien fås ved at lægge 5 til x-værdien. y er funktion af x og $y=f(x)$ fås ved at indsætte x-værdi.	$f(x+1)=f(x)+1$ $f(0)=5$ $f(x+\Delta x)=$ $f(x) + a\Delta x$; $f(x_0)=y_0$	
Objekt	Punkter (x,y), hvor y er 5 større end x. En lineær kombination med konstant sum.	x 0 1 2 3 y 5 6 7 8 En funktionstabel	$y = x + 5$ $y=f(x)$ y $= ax + b$ $y-y_0=a(x-x_0)$ $ux+vy=w$	

Sammenhængen mellem rette linjer og lineære funktioner

Funktioner med forskriften $f(x) = ax + b$ har en ret linje som graf. a er linjens hældning og $(0, b)$ er linjens skæringspunkt med 2. aksen.
$f(x+1) = a(x+1)+b = f(x) + a$



En linje har samme hældning overalt:

$a = (y - y_0)/(x - x_0),\ x \neq x_0$

$y - y_0 = a\,(x - x_0)$

$y = ax - ax_0 + y_0$

$y = ax + b$, med $b = y_0 - ax_0$ er altså en generel ligning for en ikke-lodret ret linje, hvor a er hældningen og b skæring med 2. aksen.

Ret linje

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

It støtte til udvikling af begrebsforståelse

- Dynamisk geometri giver mulighed for at arbejde dynamisk med forskellige repræsentationer. Linje
- I regneark kan der arbejdes med repræsentationer af lineær udvikling (proces) og lineære funktioner (objekt).
- I regneark eller DG kan der arbejdes med overgangen mellem diskret og kontinuert lineær udvikling (proces) og mellem lineære funktioner (objekt) af en diskret og af en kontinuert variable. Linje i regneark
- DG kan blive et redskab for elevernes arbejde med problemløsning og DG kan danne ramme om elevernes undersøgende arbejde.
- Regneark og DG kan støtte elevernes arbejde med matematisk modellering med lineære funktioner.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Opgaver der kan udfordre/støtte en objekt forståelse

Opgave 1:

(a) Marker punkter, hvor summen af punktets koordinater giver 10.

(b) Tegn en graf gennem punkterne – hvad ser du?

(c) Opskriv en funktionsforskrift (ligning), der svarer til grafen.

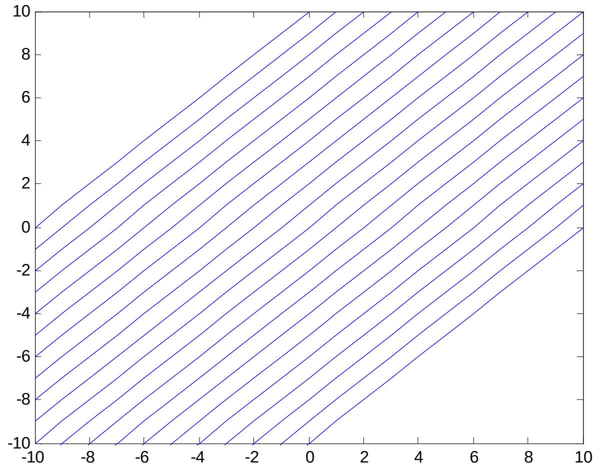
Opgave 2: Hvis man kender summen og differensen mellem to tal, hvordan finder man så tallene? Er der altid et entydigt svar?

Opgave 3: Find funktionsforskrifter for fire linjer, der danne et kvadrat som ikke er parallelt med akserne.

Opgave 4: Fremstil billeder som disse ved hjælp af et passende program.

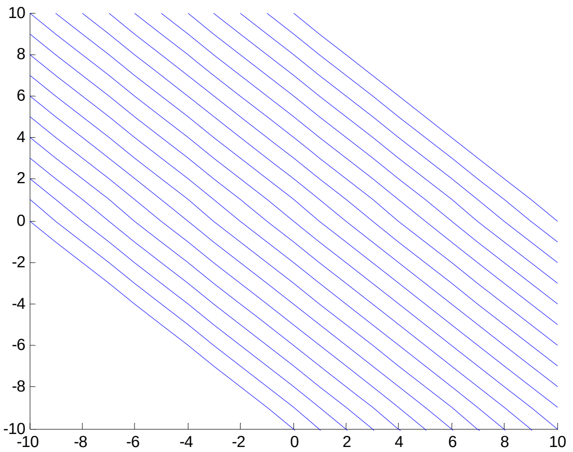
RUC Roskilde Universitet Roskilde University

$y - x = k$ for $k = -10, -9, \ldots, 10$

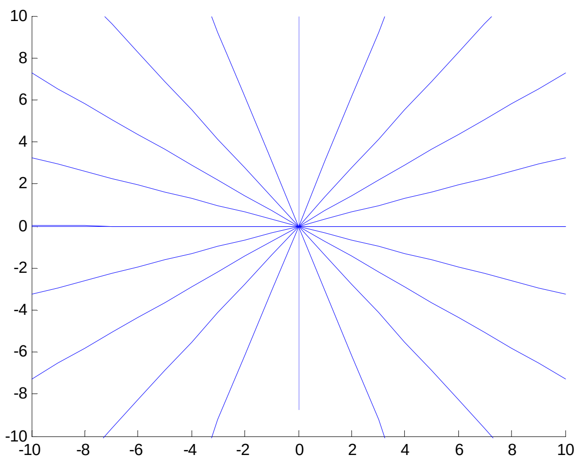


RUC Roskilde Universitet Roskilde University

$x + y = k$ **for** k **= -10, -9, …, 10**



$y = ax$ **for** $a = \tan(p\pi/10)$ **for** p **= 1, 2, .., 10**



3. Samspil mellem udvikling af praksis og forskning

Fra udvikling af praksis til forskning

- Samarbejde mellem matematiklærere på en skole om udvikling og afprøvning af undervisningsforløb.
- Rige beskrivelser af sådanne forløb med læringsmål, timeplan, eksempler på elevdialoger og –produkter samt evaluering af og refleksion over forløbet.
- Erfaringer og resultater fra gentagne afprøvning af forløb (evt. med variationer) – evt. lektionsstudier. Giver mulighed for belysning af forskningsspørgsmål.
- Teoretisk og empiriske analyser af sådanne udviklings-projekter kan danne grundlag for forskning.
- Matematikvejledere har en afgørende rolle at spille i en sådan udvikling.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

3. Samspil mellem udvikling af praksis og forskning

Nødvendige vilkår for frugtbart samspil med forskning

- Samarbejde mellem lærere og forskere skal tage udgangspunkt lærernes ønske om udvikling af praksis
- Samarbejdet skal involvere flere lærere på samme skole og være forankret i matematiklærergruppen
- Projektet skal have ledelsesmæssig opbakning og støtte – ikke alene accept
- Samarbejde med forskere skal være længerevarende – mindst et halvt skoleår.
- Matematikvejledere kan være formidlende for samarbejde med forskere.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

4. Vision for et dansk center for matematikdidaktik

DCM skal være en nationalt center, der beskæftiger sig med matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning i relation til hele det almene uddannelsessystemet og de tilhørerende læreruddannelser.

Udvikling af undervisningspraksis og forskning skal således omfatte:

- Matematik i børns leg og læring i dagtilbud,
- Matematikundervisning på grundskoleniveau
- Matematikundervisning i ungdomsuddannelserne.
- Uddannelse af matematiklærere.

DCM som samarbejdsprojekt med regional forankring og forbindelse til foreninger og matematikdidaktiske miljøer

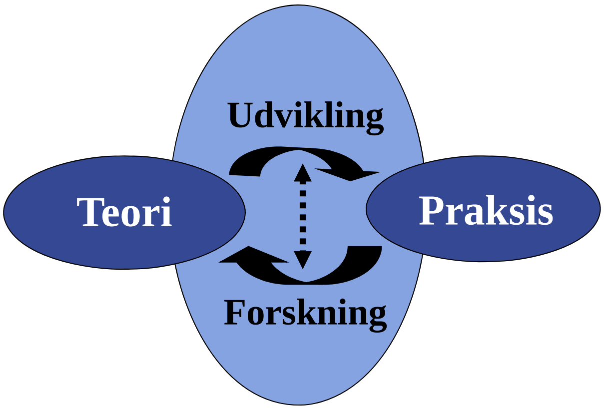
RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Initiativgruppen til etablering af et dansk center i matematikdidaktik

Morten Blomhøj (RUC),
Christina Cæsarsen (LMFK- Matematik),
Uffe Jankvist (AU, DPU),
Bent Lindhardt (Absalon),
Claus Michelsen (SDU),
Morten Misfeldt (AAU),
Gert Nielsen (DMF og Forlaget Matematik),
Elsebeth Pedersen (UVM),
Charlotte Krog Skott (UCC),
Anette Søndergaard (DMF, vejledernetværket) og
Carl Winsløw (KU, IND)

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Visionen for DCM *er at skabe samspil mellem udvikling af matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning.*



Matematikdidaktik som ét virksomhedsfelt, der omfatter både udvikling og forskning samt deres samspil.

Tak for opmærksomheden

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Referencer

Blomhøj, M. (2016). Fagdidaktik i matematik. København: Frydenlund.

Blomhøj, M. og Kjeldsen, T.H. (2014). Brug af didaktisk teori i læreres udvikling af modelleringsprojekter i matematik. MONA (2), 42-63.

Blomhøj, M. (2013). Hvad er undersøgende matematikundervisning – og virker den? I Wahl, Michael and Weng, Peter (eds.) *Håndbog for matematikvejledere*. København: Dansk Psykologisk Forlag, 172-188.

Blomhøj, M. (2006). Konstruktion af episoder Konstruktion af episoder som forskningsmetode - udforskning af læringsmuligheder i IT-støttet matematik-undervisning. I (Skovsmose og Blomhøj, 2006).

Blomhøj, M. & Højgaard, T. (2007): SOS-projektet – didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. MONA, 3, s.25-53.

Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener – matematisk modellering i praksis. In O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.). *Kunne det tænkes? – om matematiklæring*, 7-23. København: Malling Beck.

Mogensen, A. (2015). Lektionsstudier i skolen. Kollegial sparring gennem fælles studier. Dafolo.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University

Referencer

Niss, M. (1993). Centrale problemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne. I Andersen, 15. Nordiske LMFK-kongres (11-47). Konferencerapport. Århus: LMFK.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002): Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18.

Sfard, A., 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36

Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.). *Kunne det tænkes? – om matematiklæring*, 7-23. København: Malling Beck.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.). *Kan det virkelig passe? – om matematiklæring.* København: Malling Beck, 143-158.

Skånstrøm , M. (2013). Emma og Frederiks nye værelser – maling eller tapet? *Matematik*, 41, 6, 14-18.

Steinbring, H. (2005). The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective (Vol. 38). Springer Science & Business Media

Østergaard, K. (2016). Teori-praksis-problematikken i matematiklæreruddannelse: belyst gennem lektionsstudier. Roskilde Universitet: IMFUFA.

RUC Roskilde Universitet Roskilde University www.ruc.dk