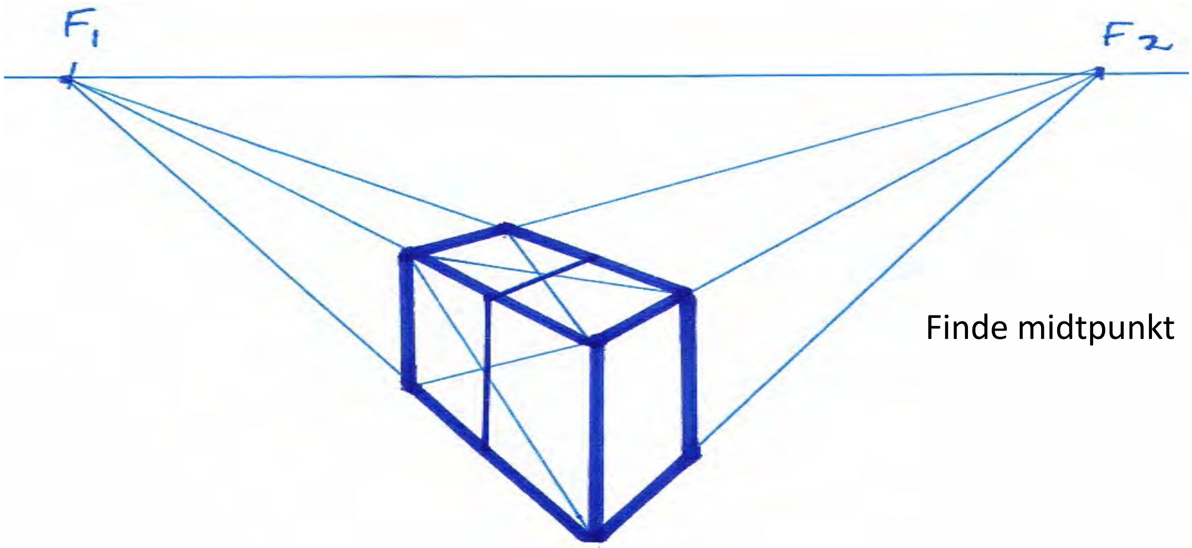
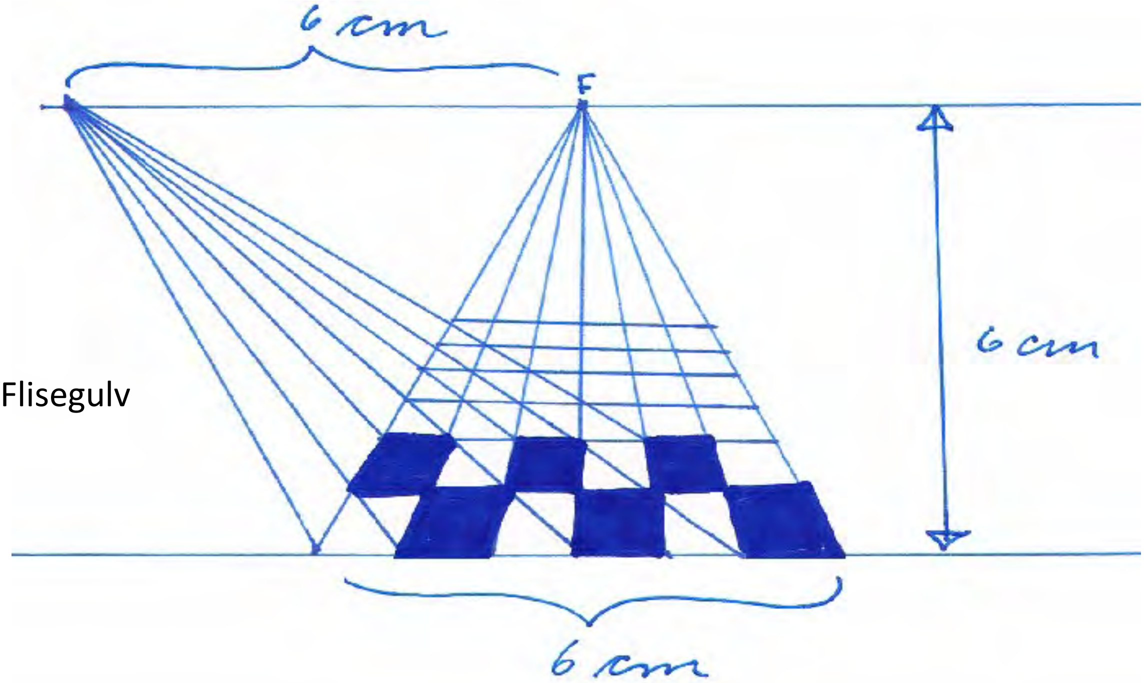
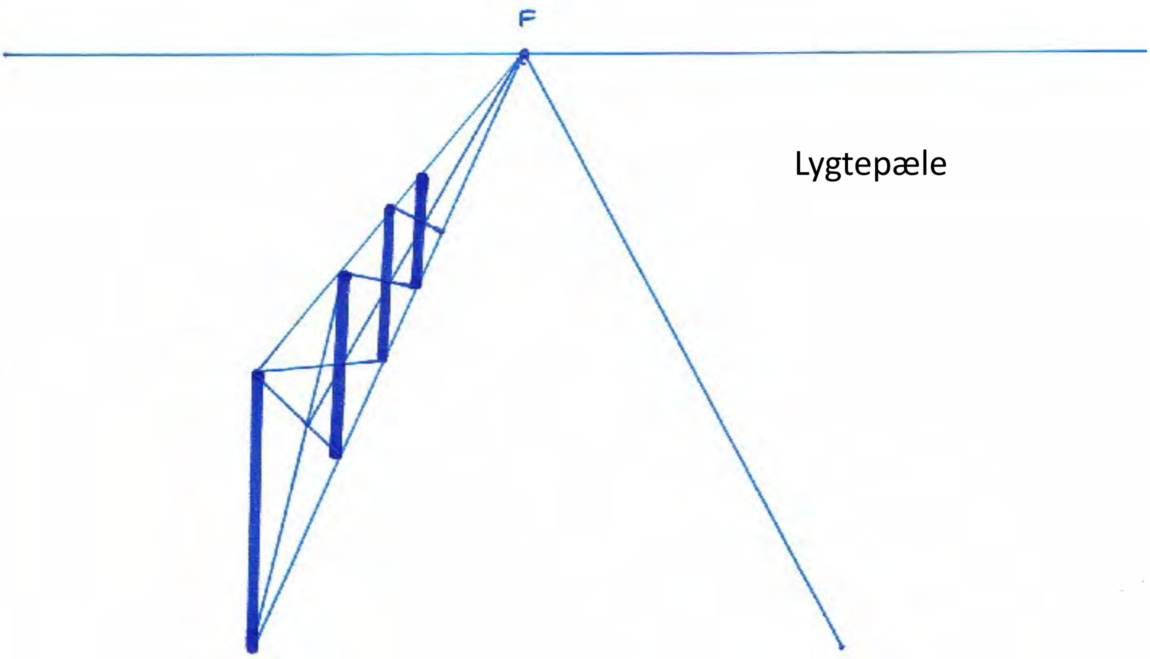


Finde midtpunkt

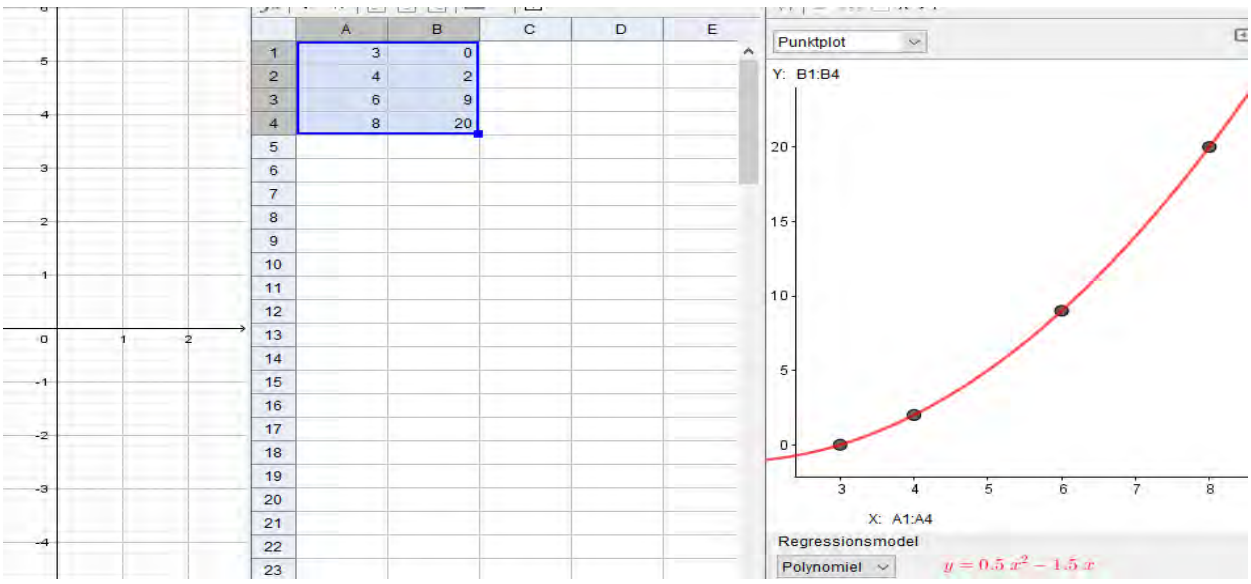


Flisegulv

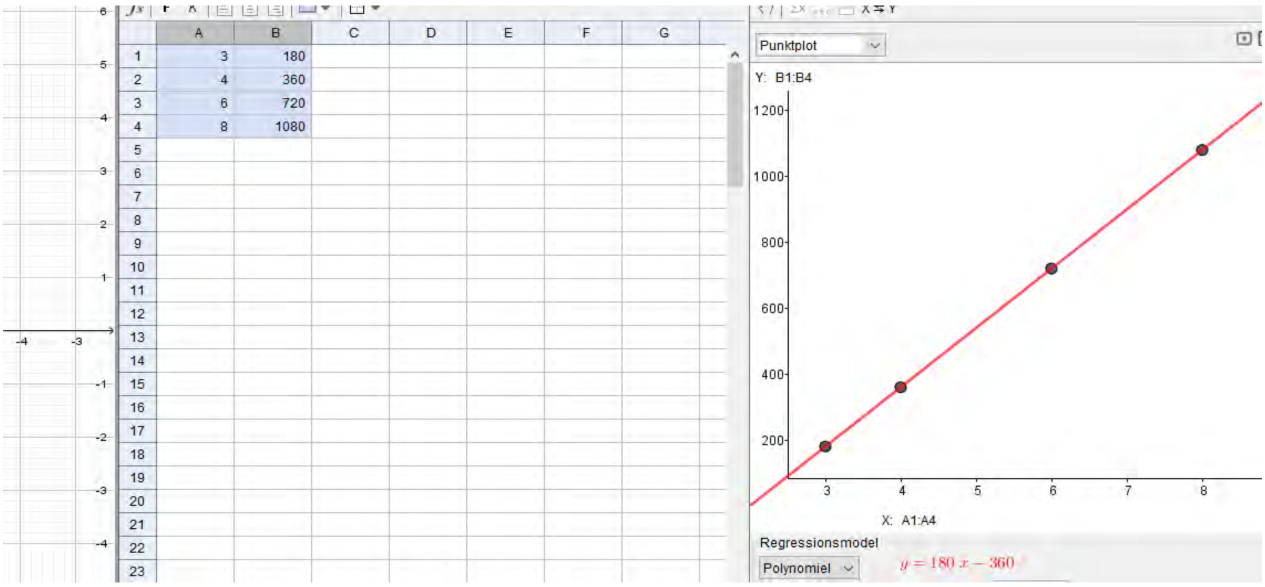


Lygtepæle

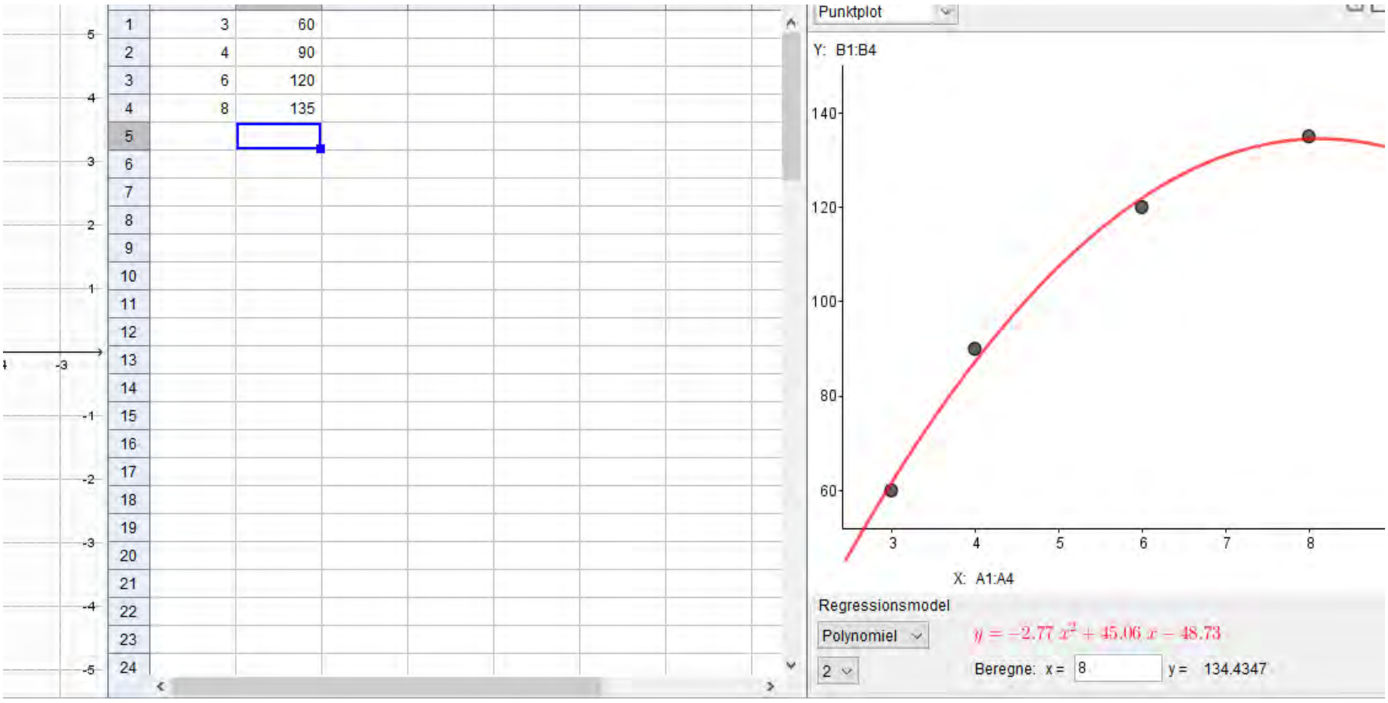
Antal diagonaler

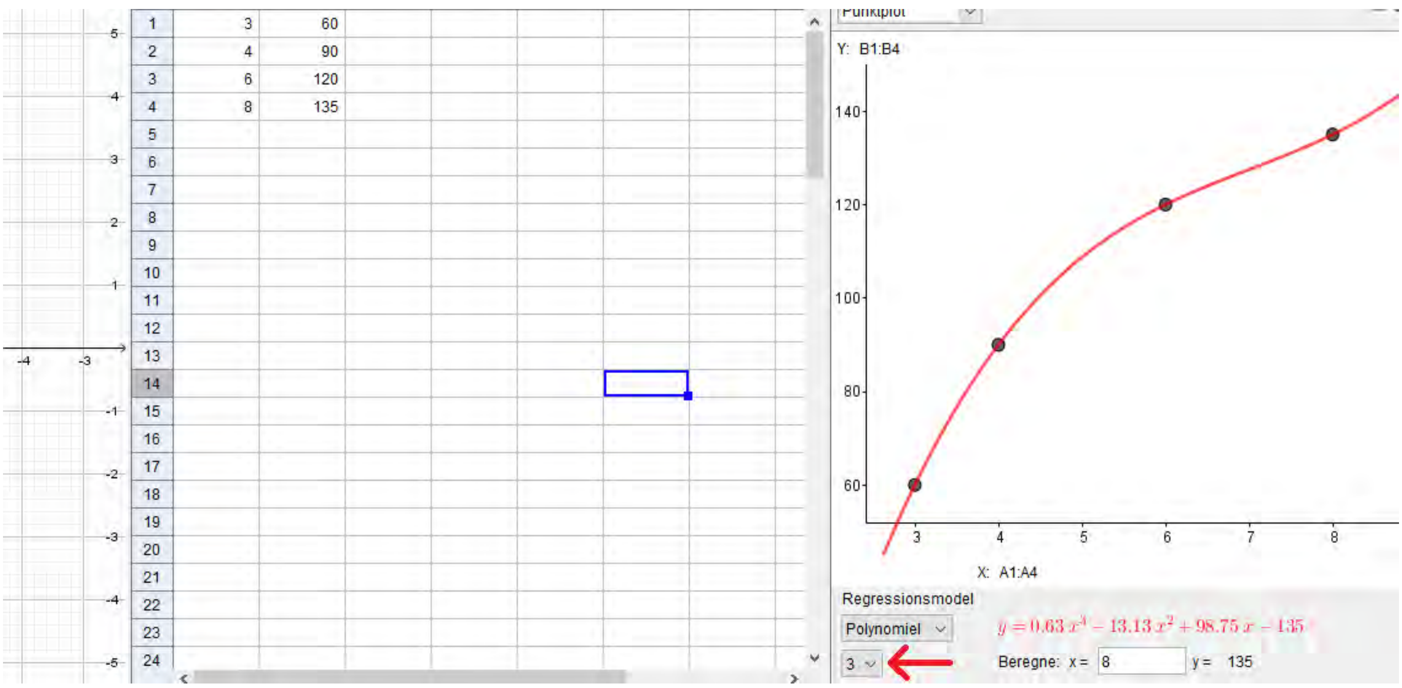


Vinkelsum



Vinkelstørrelse

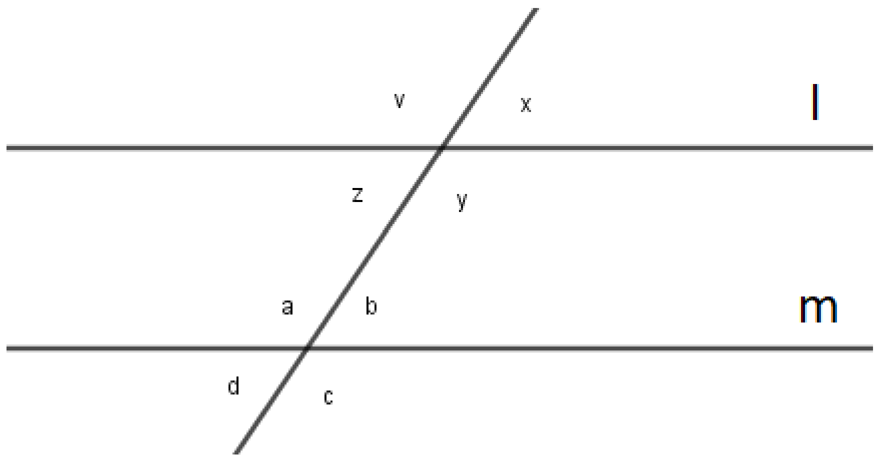




Et lille geometrikursus

Forudsætninger (aksiomer):

Parallelle linjer skærer ikke hinanden uanset hvor meget man forlænger dem.



Her er to parallelle linjer, l og m, som overskæres af en tredje linje. Derved dannes der to grupper af vinkler. Den ene gruppe omfatter vinkel v, x, y og z. Den anden gruppe omfatter vinkel a, b, c og d.

Man siger, at to vinkler er ensliggende, hvis de tilhører hver sin gruppe, og de har samme ben (højre eller venstre ben) i den skærende linje.

Fx er vinkel b og vinkel z ensliggende. De har begge venstre ben i den skærende linje.

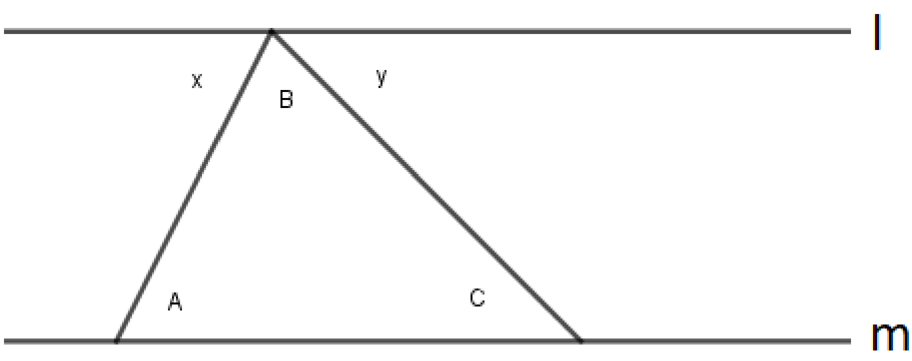
Når linjerne l og m er parallelle er de ensliggende vinkler lige store.

Hvis fx vinkel z er mindre end vinkel b ville linjerne l og m skære hinanden, og så er l og m jo ikke parallelle.

Sætning 1

Når to linjer er parallelle, er de ensliggende vinkler lige store.

Vi vil nu bevise, at vinkelsummen i en trekant er 180°



Linjen l er parallel med linjen m.

Derfor er vinkel A lig med vinkel x, og vinkel C lig med vinkel y.

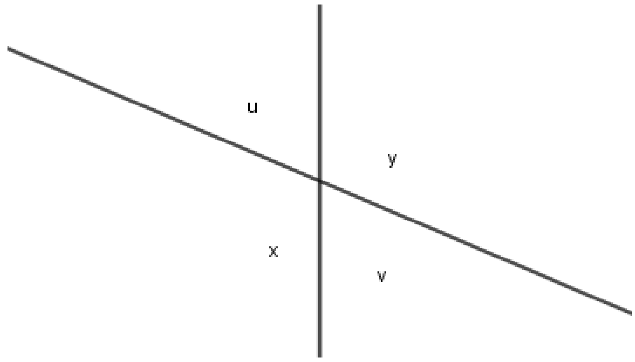
Vinkel x + vinkel B + vinkel y er 180°

Sætning 2

Vinkelsummen i en trekant er 180°.

Nu skal vi se nogle flere beviser.

Vi vil bevise, at topvinkler er lige store.
To vinkler er topvinkler, hvis de har samme toppunkt og deres ben ligger i hinandens forlængelse.



Givet: vinkel u og vinkel v er topvinkler

Bevis: vinkel u er lig vinkel v

x + v = 180°

x + u = 180°

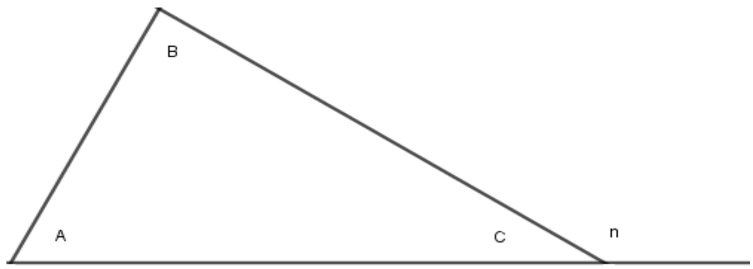
x + v = x + u

u = v

Sætning 3

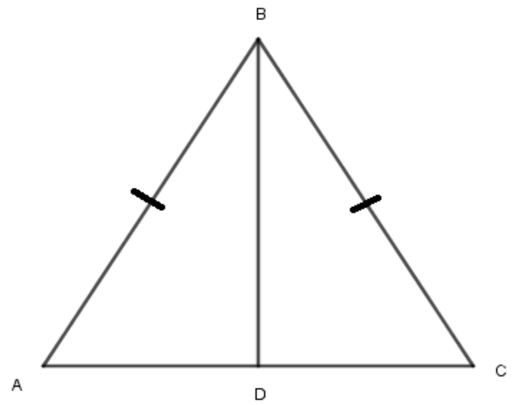
Topvinkler er lige store

Vi vil bevise, at nabovinklen til en vinkel i en trekant er lig med summen af de to andre vinkler.



Vinkel n er nabovinkel til vinkel C, fordi de har fælles toppunkt og et ben fælles, og de andre ben ligger i hinandens forlængelse.
Givet: vinkel n er nabovinkel til vinkel C
Bevis: vinkel n = vinkel A + vinkel B (kort n = A + B)
A + B + C = 180°
C + n = 180°
A + B + C = C + n
A + B = n
Sætning 4
Nabovinklen i en trekant er lig med summen af de to andre vinkler

Vi vil nu bevise, at vinklerne ved grundlinjen en ligebenet trekant er lige store.



Givet: Trekant ABC er ligebenet

Bevis: vinkel A er lig vinkel C

BD tegnes som vinkelhalveringslinjen til vinkel B

Trekant ABD er kongruent (lige så stor som) trekant CBD

fordi AB = CB

BD = BD

vinkel ABD er lig vinkel CBD

Dvs. trekanterne ABD og CBD er lige store. Dvs. vinkel A er lig vinkel C

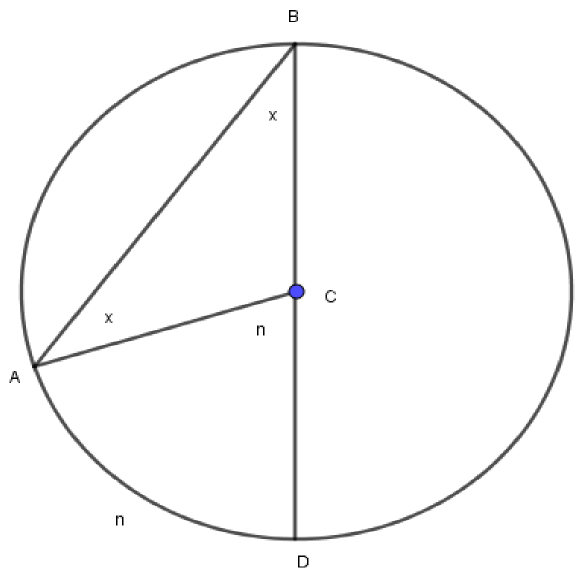
Samtidig ser vi, at AD er lig DC og

vinkel ADB = vinkel CDB = 180° / 2 = 90°

Sætning 5

Vinklerne ved grundlinjen i en ligebenet trekant er lige store.

Højden i en ligebenet trekant er samtidig median og vinkelhalveringslinje



Definitioner:

En centervinkel har sit toppunkt i centrum og er lige så mange grader som den bue, den spænder over.

En periferivinkel har sit toppunkt i cirkelperiferien.

Vi vil nu bevise, at en periferivinkel er halvt så mange grader, som den bue, den spænder over.

Givet: vinkel ABD er en periferivinkel

Bevis: vinkel ABD er $\frac{n}{2}$ grader

Vinkel ACD er en centervinkel, derfor er den n°

Trekant ABC er ligebenet.

Derfor er vinklerne ved grundlinjen lige store.

x + x = n (nabovinkel)

2x = n

x = $\frac{n}{2}$

Sætning 6

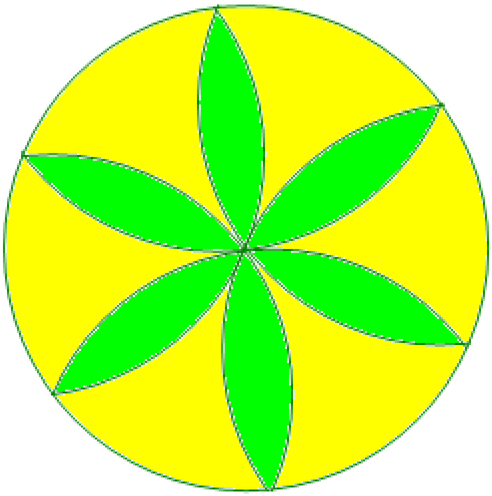
En periferivinkel er halvt så mange grader som den bue, den spænder over.

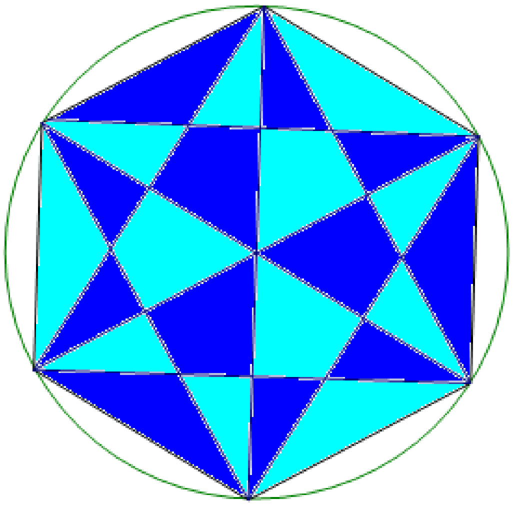
Regulær matematik med regulære polygoner.

Her kommer lidt matematik for de små elever, lidt for de store og lidt til læreren.

Det er altid spændende, når emnet er "regulære polygoner". Med blyant, passer og linial kan man komme langt.

Et dejligt kreativt emne er flotte konstruktioner med passeren. I 3. og 4. klasse er det et godt emne, men i virkeligheden er det et emne, der kan arbejdes med gennem hele skoleforløbet.
Et godt sted at starte: afsæt radius 6 gange rundt på cirkelperiferien og tegn blomster, stjerner osv.





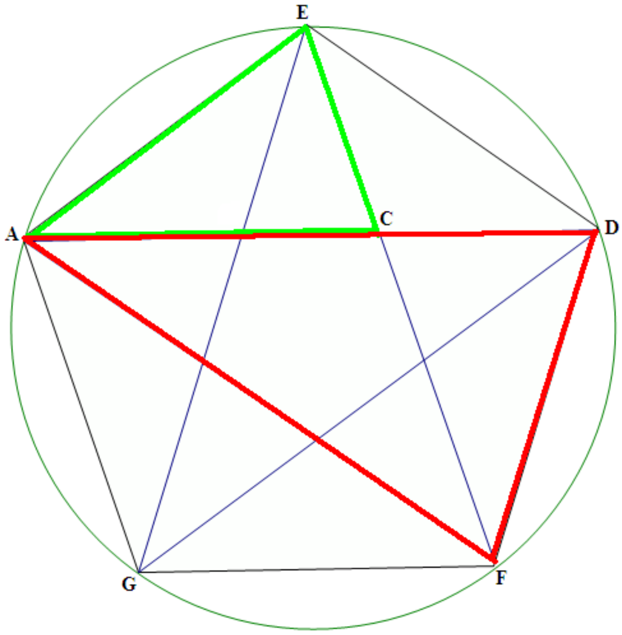
Disse tegninger kan farves flot, og eleverne kan selv opfinde nye flotte konstruktioner.
De farvestrålende konstruktioner sættes naturligvis op i klassen.
Det æstetiske, det matematiske og det håndværksmæssige (at tegne med passer) går op i en højere enhed.

Det næste emne kan så være regulære polygoner (evt. i 6. eller 7. klasse) indskrevet i cirkler.
Efter at have defineret hvad en regulær polygon er, kan man bede eleverne om at konstruere en regulær trekant, en regulær firkant, en regulær sekskant, ottekant osv. Men man må kun bruge blyant, passer og linial.

Lad eleverne finde frem til nogle formler, hvis de kan.
Man kan arbejde med vinkelsummen i de forskellige figurer. Hvis n er antallet af kanter, så er vinkelsummen $(n-2)\bullet 180^0$.
Vinkelstørrelsen i en regulær sekskant er $\frac{(6-2)*180}{6}$ grader.
Måske kan man snakke om størrelsen af periferivinkler.
Hvor mange diagonaler kan man tegne?
I en n-kant: $\frac{(n-3)*n}{2}$
Der er grundlag for mange ideer og forslag. Man kan evt. kontrollere vinklerne ved måling med vinkelmåler og man kan argumentere for rigtigheden af formlerne.

Men hvorfor springe femkanten over? Jo, den er lidt svær, for man skal bruge det gyldne snit.

Det er rart for læreren at vide, hvorfor det gyldne snit indgår i konstruktion af femkanten.
Her er forklaringen:



Vi skal indse, at C deler AD i "det gyldne snit".

For at indse det, skal vi kikke på den grønne trekant AEC og den røde trekant ADF. Disse to trekanter er ensvinklede (ligedannede).

$$\angle \text{EAC} = \angle \text{DAF} = \frac{72}{2} \text{ grader} = 36^0$$

$$\angle \text{AEC} = \angle \text{ADF} = \frac{72*2}{2} \text{ grader} = 72^0$$

Og derfor er $\angle \text{ACE} = \angle \text{AFD}$

I ensvinklede trekanter er de ensliggende sider proportionale, derfor $\frac{EC}{DF} = \frac{AC}{AF}$

men da

- EC = CD da ΔECD er ligebenet og
- DF = AC da DF og AE er korder og AE = AC da ΔEAC er ligebenet og
- AF = AD da ΔFAD er ligebenet

kan brøkerne omskrives, så vi får: $\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{AD}$

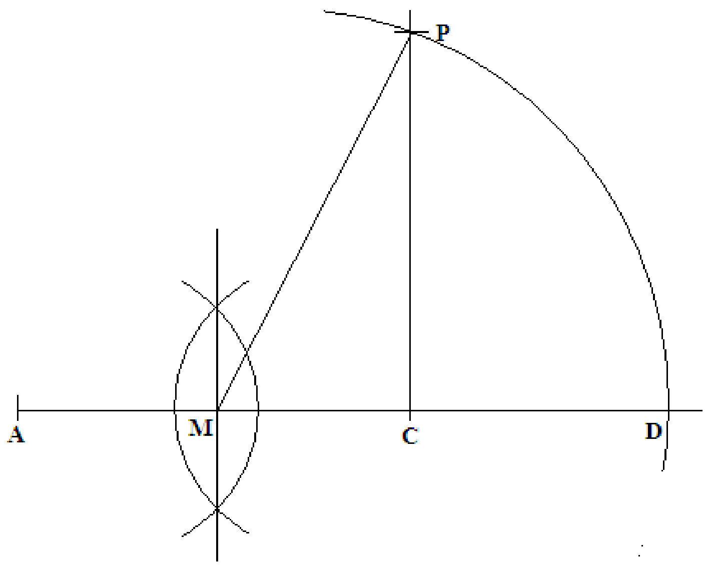
dvs. C deler AD i "det gyldne snit" fordi:

det lille liniestykke forholder sig til det store liniestykke, som det store liniestykke til hele liniestykket.

Dette var for læreren. Eleverne i overbygningen kan godt være med til konstruktionen af "det gyldne snit" og femkanten.

Hvis vi kunne konstruere Δ DAF, ville det være en smal sag at konstruere resten af 5-kanten. DF er jo korde, og punktet E har afstanden "en korde" til både A og D. Det samme gælder for punktet G. Det har afstanden "en korde" til A og F.

Nu er det frem med blyant, passer og linial. Her kommer konstruktionen.
Følg punkterne fra 1 til 12.



1. Linjestykket AC afsættes.
   Du bestemmer selv længden af linjestykket. Men det er det linjestykke, der bliver til siden i den regulære femkant.

2. Linjestykket AC forlænges ud over C.

3. I C oprejses den vinkelrette.

4. CP = AC afsættes

5. Midtpunktet af AC konstrueres. Midtpunktet kaldes M.

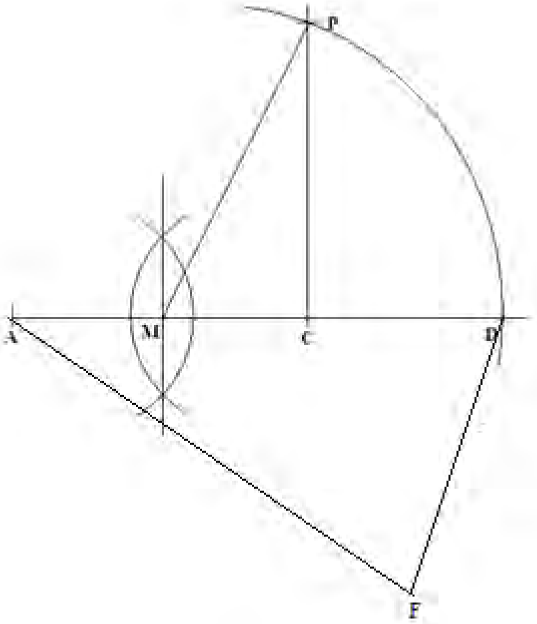
6. Med centrum i M og med radius MP tegnes en cirkelbue.

7. Hvor denne cirkelbue skærer AC's forlængelse ud over C er D.

8. Punktet C deler nu AD i "det gyldne snit". (Forklaring følger lidt senere).

9. Med radius AC og med centrum i D tegnes en cirkelbue.

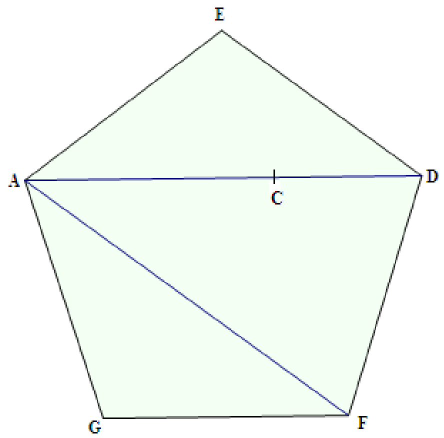
10. Med radius AD og med centrum i A tegnes en cirkelbue.



11. Hvor disse cirkelbuer skærer hinanden er F.

12. D og F forbindes. A og F forbindes.

    Nu har vi trekant ADF.
    Punktet G findes ved at tegne to cirkelbuer med radius DF og med centrum først i A og så i F.
    Punktet E findes ved at tegne to cirkelbuer med radius DF men denne gang med centrum i A og i D.
    De sidste sider i femkanten kan nu tegnes, og femkanten er konstrueret.



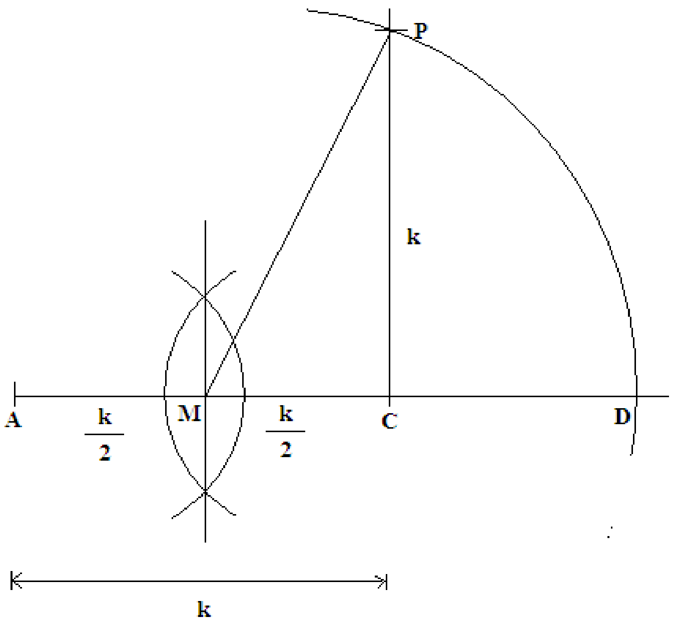
Her kommer så forklaringen på, at konstruktionen er rigtig, altså at C deler AD i "det gyldne snit"

"Det gyldne snit" har værdien $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Denne brøk kaldes "Den Guddommelige Brøk"

Vi skal altså indse at:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \text{og} \qquad \frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Se på tegningen:



Linjestykket AC kaldes for k. Derfor er AM = MC = $\frac{k}{2}$

Linjestykket CP = k

Pythagoras' lærersætning bruges nu på ΔMCP:

$$MP^2 = (\frac{k}{2})^2 + k^2 = \frac{k^2}{4} + \frac{4*k^2}{4} = \frac{5*k^2}{4}$$

MP = $\frac{k}{2}\sqrt{5}$ og dvs.

MD = $\frac{k}{2}\sqrt{5}$

Nu kan vi finde længden af AD

$$AD = \frac{k}{2}\sqrt{5} + \frac{k}{2} = \frac{k}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

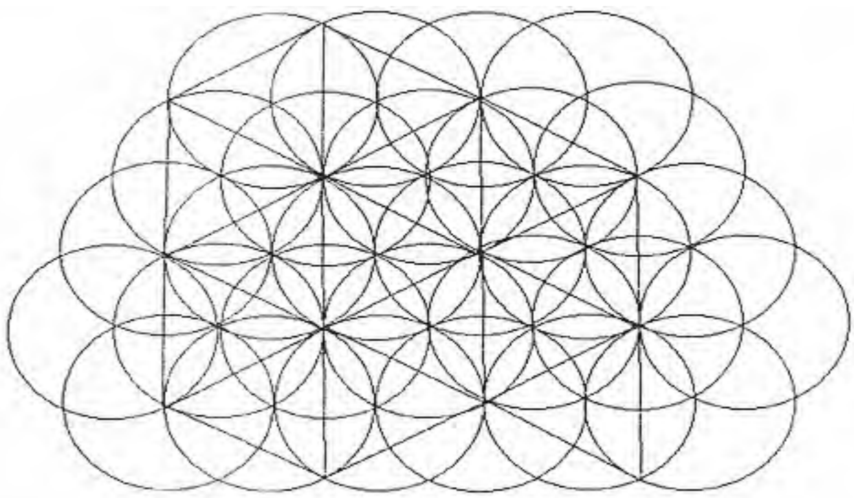
og indse at $\frac{AD}{AC}$ svarer til "Det gyldne snit".

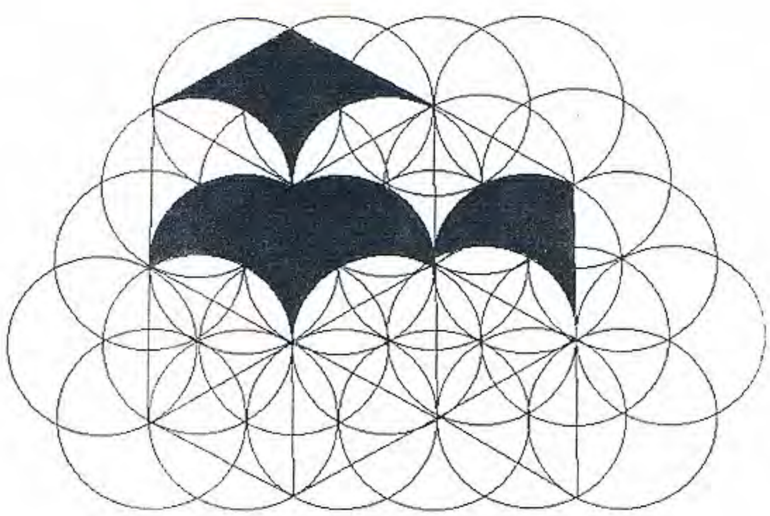
$$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{k}{2}(\sqrt{5}+1)}{k} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

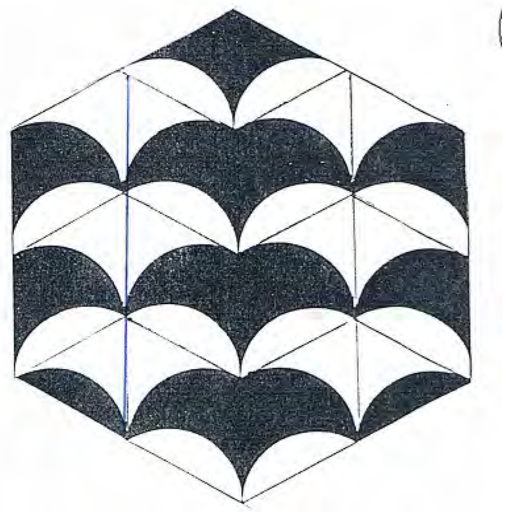
På nogenlunde samme måde kan man indse at $\frac{AC}{CD}$ også svarer til "det gyldne snit".

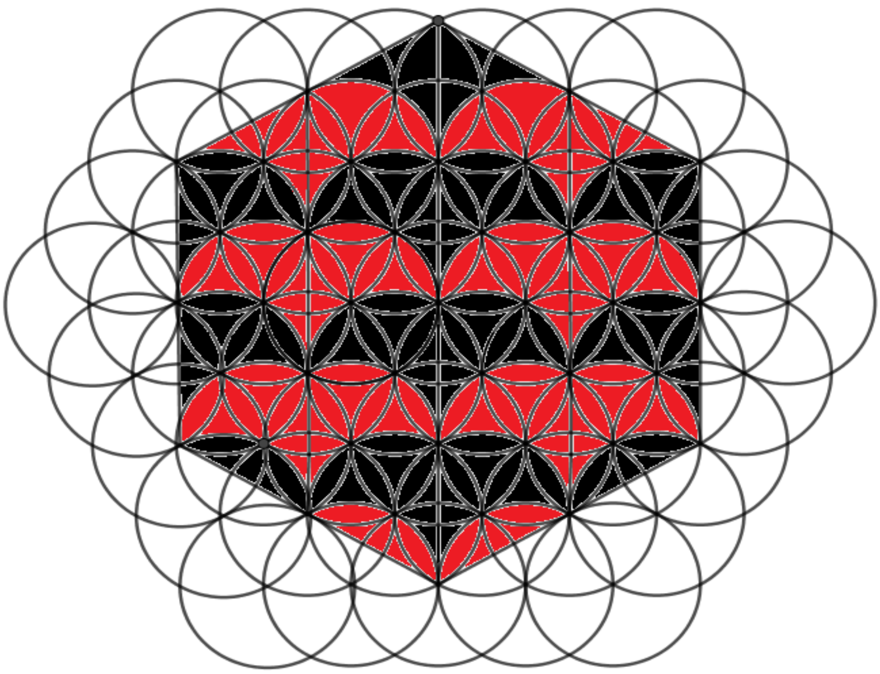
Jeg har selv i mange år konstrueret femkanter på tavlen uden egentlig at vide, hvorfor "Det gyldne snit" indgik i konstruktionen af femkanten. Forklaringen fandt jeg i Poul La Cours fine bog "Historisk Matematik". Eleverne kan så let som ingenting tegne femkanter fx med programmet Geometer eller Geogebra, og det er jo fint nok, men spørgsmålet er måske, om man ikke snyder eleverne for glæden "ved at gøre noget" med hænderne.

Tessallationer med passer / Geogebra







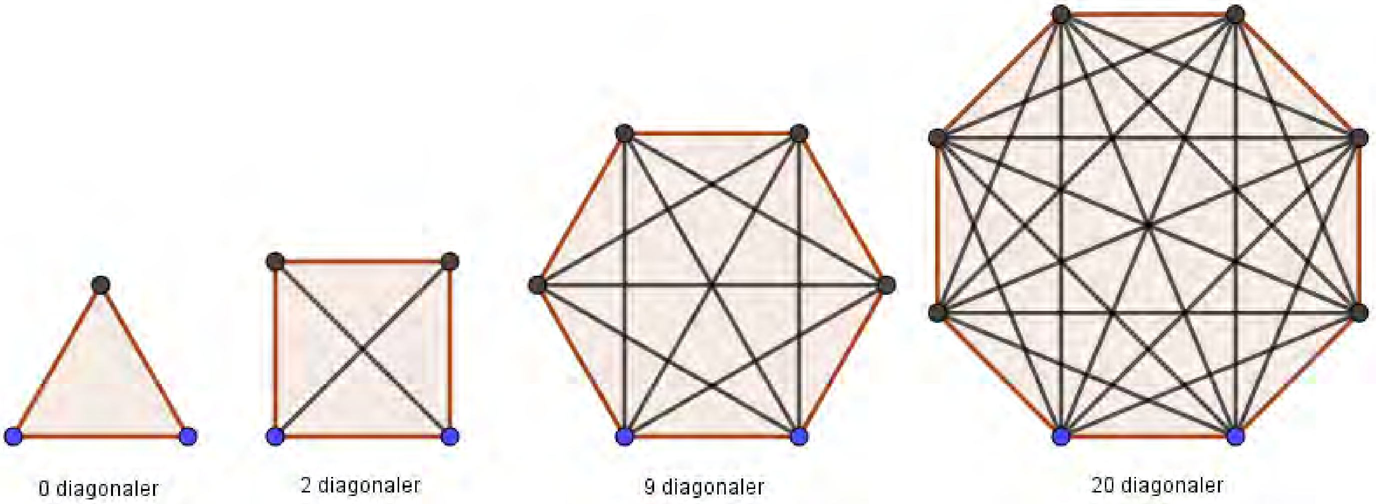


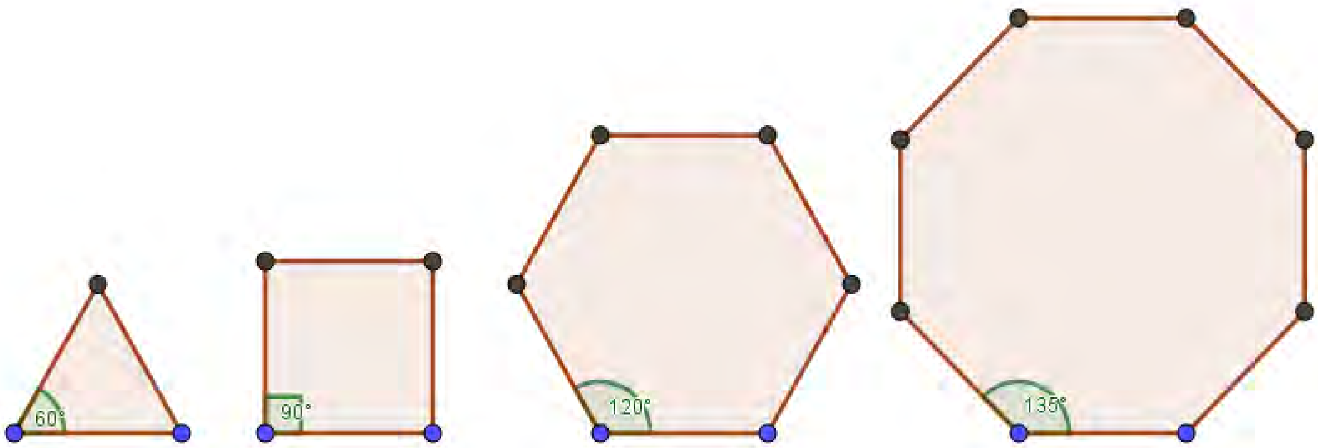
Sammenhørende værdier i regulære polygoner

Antal diagonaler	
3	0
4	2
6	9
8	20

Vinkelsum	
3	180
4	360
6	720
8	1080

Vinkelstørrelse	
3	60
4	90
6	120
8	135





Vinkelsum:

trekant: 3 ▪ 60° = 180°

Firkant: 4 ▪ 90° = 360°

Sekskant: 6 ▪ 120° = 720°

Ottekant: 8 ▪ 135° = 1080°