Det kommer an på …

Mikael Skånstrøm og Morten Blomhøj

Denne artikel handler om, hvordan der kan skabes interesse og begejstring for matematiklæring i skolen gennem undersøgende matematikundervisning. Sproget – både det talte og skrevne – og dialogen med eleverne spiller en helt central rolle i en sådan tilgang til matematikundervisning. Dermed er der klare forbindelser til Marit Johnsen-Høines forskning om matematikundervisning som tekstforståelse og tekstproduktion. Det handler om, hvordan der i undervisningen kan skabes rum for samtale og dialog, der er rettet mod matematiklæring, og som samtidig rummer plads til elevernes forskellige perspektiver, samt til kritik og udvikling af nye perspektiver. Vi præsenterer og diskuterer en didaktisk struktur for og en kategorisering af forskellige typer af undersøgende forløb til skolens matematikundervisning.

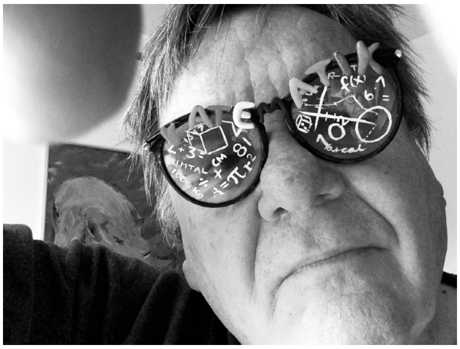
I februar 2013 blev det indtil dags dato (01.01.16) størst fundne primtal offentliggjort på www. livescience.com. Det er på 17 425 170 cifre og slår sin forgænger på 12 978 189 cifre med næsten 4,5 mio. cifre, og det er som sine forgængere fundet af matematikeren Curtis Cooper på University of Central Missouri, hvor en række computere er dedikerede alene til det formål at finde primtal.

Her kan man vælge at stoppe og nøjes med et imponeret 'hold da op for et stort tal', men man kan også beholde sine matematikbriller på og grave mere i det og stille sig flere spørgsmål, som fx: "Kan man se det, kan man sige det, er der lige mange af hvert af de 10 cifre, hvor meget fylder det, hvor langt er det, og vil man kunne skrive det?"

Hvis man gerne vil se det, er det bare at downloade det fra http://www.mersenne.org/primes/digits/M57885161.txt (NB! 17 MB file …)

Her kan man se alle cifrene – fra de tre første cifre: 581, til de tre sidste: 951. De 581 kan udtales som 581 do-millia-millia-nongen-quattor-millia-cen-quattor-nonagin-tilliard, mens det sidste tre jo bare siges som 951.

Med matematikbrillerne på kan man undre sig videre over, at der var gået knap 5 år, siden det sidste største blev fundet, eller over hvordan udviklingen i



Figur 1. Mikael Skånstrøm med sine matematikbriller.

søgetiden for det næste største primtal har været siden 2. verdenskrig. Og når de 10 cifre deles ud over de flere end 17 mio. cifre, må der jo være sådan cirka lige mange af hvert ciffer – eller?

Vælger man at trykke på print, når man har tallet på sin computerskærm, skal man lige vide, at det i Times New Roman pkt. 12 vil fylde 6370 stykker A4-papir inklusive tusindstal-separatorerne. Men hvis man nu skulle skrive det ned, startende med de 581 og sluttende med 951, hvor langt ville det så række? En traditionelt formuleret matematikopgave kunne lyde således:

Opgave 1: Verdens største primtal er på 17 425 170 cifre. Hvor langt vil tallet være, hvis hvert ciffer fylder 1 cm, og hvor lang tid vil det tage at skrive, hvis man skriver 1 tal i sekundet?

Men – og nu kommer pointen bag hele denne lange indledning – man kan også gøre noget andet. Når man, efter at have iscenesat situationen med en redegørelse omkring de faktiske talmæssige forhold, stiller spørgsmålet: ”Hvor langt er verdens største primtal så?”, går der ganske kort tid, før der er en der siger: ”Det kommer an på …”

Det magiske øjeblik

Det her er det magiske øjeblik, hvor opgaven flyttes fra opgaveparadigmet over i et *undersøgelseslandskab* (Skovsmose, 2004), hvor det er deltagerne selv, der diskuterer og bestemmer parametrene. Er det på computer, er det i hånden på papir eller med kridt på tavlen eller ude i skolegården? Beslutningerne efterfølges af diskussioner, afprøvninger, hypoteser, afgrænsninger, beslutninger og beregninger, inden et forslag kan afgives. Til forespørgslen om, hvor lang tid det vil tage at skrive, tilføjes problematikker omkring tid, udholdenhed, pauser, og materialer, og oftest skæres en hel del af virkelighedens vilkår væk for at nå frem til et muligt forslag, som oftest indledes med et ’hvis’: ”Hvis vi kan skrive uden pauser med samme hastighed, og alle cifre tager lige lang tid at skrive, og vi har blyant eller kridt nok, så …”

Figur 2. Fra oplæg omkring verdens største primtal.

Oplægget suppleres med et ønske om at relatere afstanden fra udgangspunktet, hvor vi er lige nu, med de tre første af de 17 425 170 cifre de sidste tre cifre: Er det så til Møllegade, Mariager, Molde, München, Marrakesh eller måske helt til Månen?

Undersøgende matematikundervisning

Sætningen ”Det kommer an på” flytter altså problemet fra at handle om at finde og beregne det eneste rigtige regneudtryk blandt de matematiske emner til at omhandle en undersøgende rundtur blandt de matematiske kompetencer, hvor eleverne blandt andet kan få mulighed for at vise, de ’kan handle med overblik i sammensatte situationer med matematik’ (Undervisningsministeriet, 2014).

Den iscenesatte situation giver samtidig mulighed for, at både elever og lærer kan indtage helt nye positioner i arbejdet med opgaven. Det bliver på denne måde eleverne, der får udfordringen til og fornøjelsen af at være dem, der: afgrænser og formulerer problemer, opsøger information, stiller spørgsmål, danner hypoteser, opstiller modeller, diskuterer med hinanden og læreren, og udvikler og formidler sammenhørende faglige argumenter.

Frem for at være formel- og facitkontrollant kan lærervirksomheden i en undersøgende undervisning tilsvarende karakteriseres ved at læreren: sætter scenen for undervisningen, skaber rum for dialogisk samspil i klassen, stiller åbne og nysgerrige spørgsmål, inspirerer og støtter, udbygger og sammenkæder elevernes erfaringer, samt fastholder eleverne i systematisk undersøgelse.

Undersøgende matematikundervisning kan netop karakteriseres ved, at sådanne elev- og læreraktiviteter forekommer og værdsættes i undervisningen (Blomhøj, 2013).

Oplægget med Verdens største primtal er afprøvet i mange grupper – fra 5. klasse til matematiklærere på kursus. Det fører til nye spørgsmål som fx:

Opgave 2a: Hvor lang tid tager det at tælle højt til en million?

eller i en variation

Opgave 2b: Det påstås, man kan tælle til en million på 165 timer! Hvordan vil det kunne være sandt?

Det viser sig, at dette spørgsmål kan give anledning til spændende og relevante modelleringsaktiviteter på alle klassetrin fra 5. klasse til 3.g. Eleverne må nødvendigvis gøre en række antagelser, før de kan komme til at regne på – opstille en model for – hvor lang tid det tager. Det kommer an på, hvor lang tid det tager at sige talord som fx ”hundrede” eller ”tusinde”, og hvor mange gange det nu lige skal siges på vejen til en million. Hvilket tal tager det længst tid at udtale?

Når scenen er sat til undersøgelser af denne type, sker der stor set det samme: rummet fyldes af stemmer! Stemmer, der diskuterer, argumenterer, stiller spørgsmål og foreslår hypoteser.

”Undersøkende spørsmål kan oppstå når elever påtar seg eierskap for læreprosessen slik som i eksemplet fra klasserommet, eller når elever opplever seg som meningsfullt deltagende i læringsprosessen” (Johnsen-Høines og Alrø, 2012, s. 31).

Et spørgsmål starter jo typisk med et hv-ord, men i denne kontekst er fokus også på støttende og inviterende ord som fx: Spændende iagttagelse – hvordan så du det? Hvad tænker du om det? Kan det forklares eller vises for andre? Kan det undersøges nærmere? Kan vi gøre det eller tænke det på andre måder? Hvordan kan vi være sikre på resultatet? Kan der være flere muligheder? Giver det anledning til nye spørgsmål?

Generelt gælder det ”… at å være spørrende og å stille spørsmål ikke er identiske størrelser. Spørrende væremåte er en invitasjon til andre om å være med på å utforske muligheter …” (Johnsen-Høines og Alrø, 2012, s. 33). Det er det, der ofte er på færde i en undersøgende undervisningssituation. Pointen er at støtte eleverne til selv at udvikle motiver for undersøgelser, samt at opmuntre og hjælpe eleverne med at gennemføre faglige undersøgelser uden at tømme situationerne for læringsindhold. Efterfølgende støttes elevernes refleksioner over deres erfaringer og resultater i samspil med andre elever med henblik på opbygning af deres kompetencer og etablering af fælles matematikviden i klassen.

Vi – og mange andre matematiklærere og matematikdidaktikere – har længe arbejdet med at udvikle praksis og teori om undervisning med et stærkt undersøgende element. Det gælder i særdeleshed Marit Johnsen-Høines, der i hele sin forskningsvirksomhed har været optaget af, hvordan man gennem dialog kan få indsigt i elevers undersøgende arbejde, og hvordan man som lærer gennem rammesætning og dialog kan støtte elevers matematiklæring i sådanne situationer. Og tillige også i, hvordan man kan støtte lærere og lærerstuderende i at udvikle en sådan matematikdidaktisk praksis.

Undersøgende matematikundervisning eller inquiry based mathematics education, som det hedder i den internationale forskningslitteratur, repræsenterer således på ingen måde en ny tilgang til matematikundervisning. Men i de senere årtier har den undersøgende tilgang skabt en hovedstrømning i første omgang i naturfagsdidaktik under betegnelsen Inquiry Based Science Education [IBSE], og inden for det senest årti er denne trend også blevet markant i matematikdidaktik med parallellen Inquiry Based Mathematics Education [IBME].

Udviklingen er blandet andet drevet af politiske interesser for at tiltrække flere studerende til teknisk naturvidenskabelige og matematikbaserede uddannelser. Det kan blandt andet ses i EU's bevillinger til udviklingsprojekter inden for matematik- og science undervisning. Om denne udvikling og begrebet *undersøgende matematikundervisning* og dets relation til andre matematikdidaktiske skoler kan man læse uddybende i Artigue og Blomhøj (2014).

Inspirationen fra Dewey

Når pædagogiske strømninger drives af stærke politiske interesser, er der i særlig grad behov for at holde fast i det pædagogiske grundlag. Den undersøgende tilgang til undervisning har dybe historiske rødder. Den amerikanske uddannelsesfilosof John Dewey (1859–1952) udviklede således en sammenhængende uddannelsesteori med tilhørerende pædagogisk praksis realiseret i en forsøgsskole baseret på undersøgende tilgange til læring og udvikling af viden (Dewey, 1916 og 1938). *Learning by doing* blev en parole for denne pædagogik, hvor fokus var på elevernes undersøgelser – og navnlig på deres refleksioner over erfaringer og resultater af undersøgende arbejde støttet og opmuntret af deres lærere.

Det er stadig relevant at forholde sig til grundprincipperne i Deweys uddannelsesfilosofi og overveje, hvordan de i dag kan være støttende for udvikling af en undersøgende undervisningspraksis i matematik. Nedenstående syv punkter sammenfatter væsentlige elementer i Deweys uddannelsesfilosofi:

- Mennesket søger at forstå og beherske sin omverden gennem undersøgende og problemløsende adfærd, samt ved at udvikle og dele sin viden gennem social interaktion.

- Videnskabelig viden er udviklet gennem raffinering og kultivering af denne grundlæggende erkendelsesinteresse og er således ikke grundlæggende forskellig fra almen menneskelig viden.
- Gyldig (sand) viden er effektiv til forståelse af fænomener og løsning af problemer. Eleverne skal opleve, at den viden, de udvikler, er nyttig og meningsfuld i deres omverden.
- Uddannelse skal udvikle den enkelte elev til at lære gennem undersøgelse og refleksion i sociale fælleskaber.
- Elevernes erfaringer og viden er grundlaget for tilrettelæggelse af undervisning.
- Viden almengøres i undervisningen gennem refleksion over fælles erfaringer.
- Det overordnede mål er at uddanne eleverne til at tage aktiv og kritisk del i udvikling af demokratiske samfund.

Disse principper giver meget mere kød og blod og legitimitet til undersøgende matematikundervisning end bestræbelsen om blot at gøre matematikundervisningen mere spændende for flere elever for derved at bidrage til uddannelse af kvalificeret arbejdskraft til det moderne højteknologiske samfund. Men samtidig er det naturligvis også meget mere didaktisk forpligtende og krævende at udvikle praksis for en undersøgende matematikundervisning, der realiserer disse principper.

Undersøgende matematikundervisning i praksis

I samarbejde med lærere har vi erfaring med, at den følgende trefasede didaktiske struktur for undersøgende undervisningsforløb kan være en stor hjælp for læreres tilrettelæggelse og gennemførelse af undersøgende forløb. Samtidig og nok så vigtigt kan strukturen bidrage til at lærerne ikke bare kan se, men også selv skabe forbindelse mellem de grundlæggende principper og den konkrete praksis (Blomhøj, 2013).

Den generelle struktur for undersøgende undervisningsforløb omfatter tre hovedfaser (1) Iscenesættelse, (2) Elevernes undersøgende arbejde og (3) Fælles refleksion og faglig læring. Faserne behøver ikke at forløbe tidsmæssigt som angivet, og de kan gentages flere gange i samme forløb, men hver fase har sit klare didaktiske fokus og relaterer sig derved på forskellig vis til de grundlæggende principper:

(1) Iscenesættelse af forløbet over for eleverne indeholder:
- overdragelse af udfordringen/problemet til eleverne
- etablering af et fælles sprog med eleverne om udfordringen
- etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
- formidling af de tidsmæssige og praktiske rammer
- klargøring af produktkrav, bedømmelsesformer og succeskriterier

(2) Elevernes selvstændige undersøgende arbejde kræver
- tilstrækkelig tid, frihed og støtte til, at de kan arbejde selvstændigt med problemet
- støtte til etablering af samarbejde mellem elever
- støtte og udfordring gennem dialog
- forberedelse gennem konstruktion af eksemplariske dialoger

(3) Fælles refleksion og faglig læring indebærer
- at erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og gøres fælles
- udpegning af faglige pointer i elevernes arbejde
- opbygning af fælles faglig viden med fælles fagsprog
- etablering af forbindelser til tidligere erfaringer og etableret viden
- åbning af nye mulige spørgsmål og undersøgelser

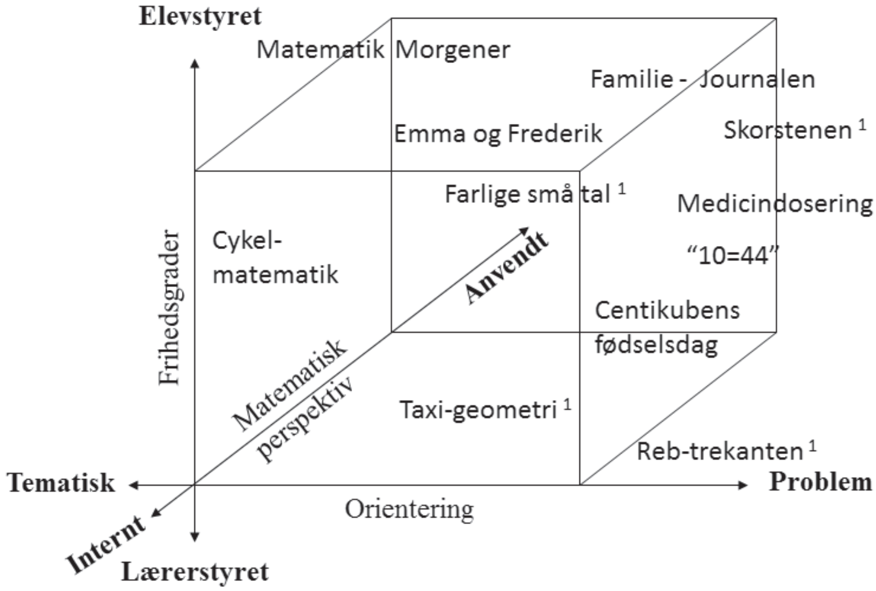
Der er forskellige didaktiske udfordringer knyttet til de tre faser. Iscenesættelsen udfordrer den traditionelle lærerrolle, fordi læreren skal bringe sig selv i spil på en anden måde end i den mere formidlende praksis.

Under elevernes selvstændige arbejde er det udfordrende at støtte og hjælpe eleverne uden at tømme situationen for læringsindhold. I forhold til refleksion og opbygning af fælles faglig læring i klassen er det udfordrende for læreren at anvende og evaluere elevernes forskellige læringsudbytte.

Selv om undersøgende forløb følger disse hovedfaser, kan de naturligvis tjene vidt forskellige læringsmål, og de kan være organiseret omkring meget forskellige typer af udfordringer og problemer. I Blomhøj (2013) er der udviklet en model for et didaktisk mulighedsområde for undersøgende forløb. Det er udspændt af tre dimensioner: Tematisk vs Problemorienteret, Internt matematisk vs Anvendelsesorienteret, samt Lærerstyret vs Elevstyret. Modellen er gengivet i figur 3 med indplacering af en række undersøgende undervisningsforløb, som vi har arbejdet med i forskellige projekter.

Undersøgende forløb kan være organiseret
(A) tematisk
(B) med et bestemt matematisk læringssigte
(C) omkring en modelleringssituation
(D) omkring en autentisk modelleringssituation med kritisk potentiale

Vel vidende, at der selvfølgelig forekommer overlap mellem de fire typer af situationer, sættes her uddybende ord med tilhørende eksempler på undersøgende oplæg til hver af de fire forskellige typer. Hver type eksemplificeres med forløb fra udviklingsprojekter eller efterdannelseskurser, hvor lærere gennemførte undersøgende forløb i egne klasser.



Figur 3. Et didaktisk mulighedsområde for undersøgende matematikundervisning.

I (A) er det det valgte tema, der bestemmer hvilken matematik, der er nødvendig eller hensigtsmæssige at sætte i spil. I figur 3 nævnes Matematik Morgener som eksemplarisk for denne type undersøgende forløb. Her er udgangspunktet, at eleverne arbejder med at beskrive og analysere deres egen hverdagsmorgen. Det bliver derfor forskelligt fra elev til elev, hvilken matematik de kommer til at arbejde med, selvom vise temaer som tidsforbrug, morgenmad og transport til skole naturligt kommer til at indgå i de fleste elevers arbejde (Blomhøj og Skånstrøm, 2006). *Cykelmatematik* et eksempel på et tema, der indgår i mange lærebøger, og som kan være udgangspunkt for undersøgende arbejde, hvis eleverne får lejlighed til selv at formulerer spørgsmål i relation til cykler og cykling, og til efterfølgende at undersøge dem ved hjælp af matematik. I Skånstrøm (2015a) behandles endvidere temaerne *En sportsgren*, *Min fritid*, og *Verdens største primtal* som eksempler på tematisk oplæg til undersøgende arbejde. Det er karakteristisk for det tematiske udgangspunkt for undersøgende arbejde, at der en vis åbenhed i forhold til hvilken matematik, der kommer i fokus i elevernes arbejde.

I (B) er det læringsmålet, der er i fokus – hvad er det, eleverne skal lære ved at arbejde undersøgende med det valgte oplæg? *Rebtrekanten* og *Taxi-geometri* er eksempler fra figur 3, hvor fokus er på henholdsvis trekant uligheden og af-

1 Forløb der er analyseret i Artigue og Blomhøj (2013). For de øvrige forløb er der henvisninger i figuren eller senere i denne tekst.

standsmål. Skånstrøm (2015, a–e) giver eksempler på iscenesættelse af fagligt fokuserede undersøgelser. Det drejer om forløbene *Chistyakov* (russisk ishockeyspiller, der engang var kendt i Danmark) om ligedannethed af ishockeypucke; *Emmas og Frederiks nye værelser,* der handler om arealberegning og regnearksbudgetmodeller; *Euler-linjen,* der er oplæg til geometriske undersøgelser med et dynamisk geometri program som GeoGebra; samt *Fart & Tempo,* hvor eleverne måler og undersøge sammenhæng mellem tid og sted for bevægelser de selv vælger. Forløbene er udviklet med sigte på at lægge tilrette for undersøgende situationer, som kan bringe et bestemt matematiske indhold i spil. Iscenesættelsen spiller her først og fremmest en motiverende rolle. Centikubens fødselsdag er eksemplarisk for denne type forløb. Her undersøger eleverne hvordan antallet af centikubes med henholdsvis 0, 1, 2 og 3 flader synlige udvikler sig, når den store kube vokser med en centikube i hver retning hver gang den har fødselsdag. På denne måde kommer eleverne til at arbejde med talfølger og funktioner. Forløbet er udviklet af Mikael Skånstrøm og analyseret i detaljer i Blomhøj (2016).

I (C) er autenticiteten og matematisk modellering i fokus. Oplægget ”10 = 44” (Blomhøj, 2003) fra figur 3 tager udgangspunkt i en færdselskampagne, der fokuserer på forskellen mellem at køre 50 km/t og 60 km/t. Der er eksempler fra elevernes arbejde med Matematik Morgener (Blomhøj og Skånstrøm, 2006), hvor der arbejdes med autentisk matematisk modellering, fx. oplægget Hvor langt rækker en tube tandpasta? Se også Skånstrøm (2015f).

I (D) tilføjes yderligere elementer fra ’kritisk matematikundervisning’ som den er udviklet af Ole Skovsmose (1994) og forbundet til et dialogisk perspektiv på matematiklæring i Alrø og Skovsmose (2002). Som et undervisningsforløb, der er eksemplarisk for denne type fremhæves forløbet ’Family-support’ (Skovsmose, 1994). I dette forløb diskuteres begrebet retfærdighed i forbindelse med fordeling af sociale ydelser i et minisamfund. Eleverne arbejder med selv at ’oversætte’ forskellig principper for retfærdighed til matematiske modeller for fordeling af blandt andet børnepenge i et mikrosamfund. Eleverne oplever her, hvordan der gennem modelleringsprocessen skabes forskellige former for retfærdighed. Her er altså både anvendelsen af matematikken og forståelsen af retfærdighed til diskussion – samtidig. Oplægget, der iscenesætter fordelingen af børnepenge, kaldes også *Familie Journalen* (Skånstrøm 2015g).

De farlige små tal (Alrø m.fl., 2006) er andet eksempel på undersøgende forløb med et kritisk perspektiv. Her arbejder eleverne med modellering af risiko for salmonellaforgiftning fra æg.

Kritiske perspektiver på matematisk modellering og anvendelser af modeller kan imidlertid antage mange forskellige former og viser sig relevante også i undersøgende forløb, der ikke er planlagt eksplicit med henblik herpå. I *MatematikMorgener* (Blomhøj og Skånstrøm, 2006) kan der fx pludselig opstå grundlag for at vurdere, om det er farligt at cykle i skole: Hvor mange uheld med cyklister er der om året på skolevejen? Hvordan kunne vejen gøres mere sikker? ”10 = 44” giver grundlag for refleksion over og mulig kritik af fartgrænserne ved skolen.

Et arbejde med en fælles cykelforsikring, fordeling af tid på multibanen og – i større målestok – det danske valgsystem, der er baseret på D’Hondts metode fra slutningen af 1800-tallet, er alle eksempler, hvor retfærdighed er baseret på matematiske modeller. Disse og andre matematiske modeller, der omsætter og herunder omskaber ”retfærdighedsprincipper” til operationelle teknikker, kan og bør bringes til diskussion i offentligheden. Det er en forudsætning for fastholdelse og udvikling af vores demokrati. Det kræver imidlertid, at modellerne og deres funktioner kan forstås i offentligheden. Grundlaget herfor må skabes i skolens matematikundervisning.

Det er vores erfaring, at klassificeringer og diskussioner af konkrete eksempler på undersøgende undervisningsforløb som her skitseret, giver et godt grundlag for samarbejde med matematiklærere i udviklingsprojekter og ved efter- og videreuddannelseskurser. Det gør det muligt at diskutere de læringsmæssige kvaliteter og didaktiske udfordringer ved de forskellige typer af undersøgende forløb, samt at støtte lærerne i at arbejde bevidst med den tredelt tilrettelæggelse af undersøgende i forhold til de fire forskellige typer af forløb. Endelig kan diskussion af eksempler på hver type af forløb give lærerne bedre grundlag for selv at finde op og udvikle ideer til undersøgende forløb.

Matematiklæring for fremtiden gennem inquiry

I alle de nævnte eksempler under hver af de fire positioner sættes vendingen ’Det kommer an på …’ i spil sammen med kompetencer, der ofte refereres som centrale i det 21. århundrede (Elektronisk Mødested for Undervisningsverdenen [EMU], 2015), hvor eleverne blandt andet skal være i stand til at:

- opbygge ny viden
- samarbejde
- anvende digitale værktøjer til at understøtte læreprocesser
- evaluere egen læring
- udvikle kommunikative kompetencer
- arbejde problemorienteret
- udvikle global bevidsthed

Det er derfor helt nødvendigt, at vi overlader meget mere af læreprocessen til eleverne og flytter fokus væk fra det færdighedsprægede i faget, hvor opgaver løses ved at finde det (eneste) rigtige resultat ved hjælp af den korrekte algoritme. I al for høj grad sidder eleverne i undervisningssituationer som levende lommeregnere, hvor deres eneste motiv knyttet til det matematisk indhold af deres virksomhed er at finde det svar på opgaven, der korresponderer med facitlisten.

Fokuserer man i stedet på den undersøgende tilgang med plads forskellige elevperspektiver og mange invitationer til 'det-kommer-an-på' refleksioner, inddrages eleverne på en aktiv måde. Derved får de mulighed for at danne egne læringsrelevante motiver for deres undersøgelser og for at sætte deres matematiske kompetencer i spil og på den måde udvikle dem. Det handler om, at eleverne bliver optaget af at finde ud af noget i situationen, og at de med Mellin-Olsen's (1987) begreb om rationaler for læring danner sig rationaler, der rækker udover det instrumentelle, der knytter sig til elevrollen, og det at klare sig godt i skolen. Mellin-Olsen understreger de sociale aspekter af sådanne rationaler og benævner dem derfor sociale læringsrationaler (Mellin-Olsen, 1987, s.156–159). Opbygningen af sådanne rationaler kan netop støttes gennem iscenesættelse og tilrettelæggelse af rammer for elevernes undersøgende arbejde, der inviterer til social interaktion og refleksion. I denne sammenhæng spiller lærerens samtale med eleverne under deres undersøgende arbejde en helt central rolle. Det er nærmere analyseret og begrebssat i Johnsen-Høines og Alrø (2012).

Overordnet set handler det som lærer om, hvordan man støtter eleverne i klassen i at udvikle vane for undersøgelser i og med matematik, og opbygger tillid til, at de gennem undersøgelser og refleksion med støtte fra læreren og læringsmiljøet kan lære relevant matematik.

Det kan gøres gennem iscenesættelse af undersøgende forløb, som vi her har givet en række eksempler på, men det kræver naturligvis længerevarende pædagogiske indsatser at opbygge en åbenhed og vane i en klasse for undersøgende arbejde i matematik. I dette arbejde er det afgørende, at læreren selv har en undersøgende tilgang til udvikling af egen praksis. For de fleste kræver dette samarbejde med kollegaer i et fagteam eller støtte på anden vis gennem fx udviklingsprojekter.

Som læreruddanner og matematikdidaktiker handler det om at udvikle en åben, undersøgende og kritisk tilgang til, hvordan man kan støtte, at lærere udvikler faglige og didaktiske kompetencer, og dermed det faglige mod, den fantasi og den empati, der er grundlaget for undersøgende matematikundervisning.

En undersøgende tilgang til matematikundervisning er således relevant på mindst tre forskellige didaktiske niveauer (Jaworski, 2004, s. 24):

(1) Undersøgelser i eller med matematik i undervisningssituationer.
Det er relevant på alle trin af uddannelsessystemet, at elever (de lærende) arbejder med at undersøge situationer/udfordringer/problemer i undervisningen som led i deres matematiklæring.

(2) Design, afprøvning og refleksion over (1).
Lærer og/eller lærerstuderende arbejder med at designe, afprøve og reflektere over og undervisningssituationer og forløb, hvor eleverne kan arbejde med (1).

(3) Forskningen i forhold til både (1) og (2).
Lærere og forskere indgår forsknings- og udviklingsprojekter om undersøgelser af lærings- og undervisningsmæssige muligheder og vanskeligheder ved undersøgende matematikundervisning i relation til (1) og (2).

En undersøgende tilgang til matematikundervisning på alle tre ovenstående didaktiske niveauer kan efter vores opfattelse give et væsentligt bidrage til udvikling af en tidssvarende og fremtidsrettet matematikundervisning.

Så kan fremtiden bare komme an!

Litteratur

Alrø, H., Blomhøj, M., Bødtkjer, H., Skovsmose, O., & Skånstrøm, M. (2006). Farlige små tal – almendannelse i et risikosamfund. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.): *Kunne det tænkes? – om matematiklæring* (s. 24–39). København: Malling Beck.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique.* Dordrecht: Kluwer.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6), 797–810.

Blomhøj, M. (2016): *Fagdidaktik i matematik*. Under udgivelse. København: Frydenlund.

Blomhøj M., (2013). Hvad er undersøgende matematikundervisning – og virker den? I Andersen M.W. & Weng P. (red.) *Håndbog om matematik i grundskolen*. København: Dansk Psykologisk Forlag.

Blomhøj, M. (2003). Modellering som undervisningsform. I Skovmose, O. og M. Blomhøj (red.): *Kan det virkelig passe?* (s. 51–71). København: L&R Uddannelse,

Blomhøj, M og Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener – matematisk modellering i praksis. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.): *Kunne det tænkes? – om matematiklæring* (s. 7–23). København: Malling Beck.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt.

Elektronisk Mødested for Undervisningsverdenen (2015), lokaliseret 01.08.15 på http://www.emu.dk/modul/21st-century-learning-skills

Johnsen-Høines, M. & Alrø, H. (2012). Trenger en å spørre for at være spørrende?, I: M. Johnsen-Høines, og H. Alrø (red.): *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis – Bok I* (s. 21–36). Bergen: Caspar Forlag.

Johnsen-Høines, M. (2002). Fleksible språkrom. *Matematikklæring som tekstutvikling*. Avhandling for Dr. Philos, Det psykologiske fakultet, Universitetet i Bergen, Bergen.

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: Co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. I: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 1*, 17–36.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The Politics of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.). *Kan det virkelig passe – om matematiklæring* (s. 143–157). København: L&R Uddannelse.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Skånstrøm, M. (2015a). *Verdens største primtal.*

Skånstrøm, M. (2015 b): *Chistyakov*.

Skånstrøm, M. (2015 c): *Emmas og Frederiks nye værelser*

Skånstrøm, M. (2015 d): *Euler-linjen*

Skånstrøm, M. (2015 e): *Fart & Tempo*

Skånstrøm, M. (2015 f): *Hvor langt rækker en tube tandpasta?*

Skånstrøm, M. (2015 g): *Familie Journalen*

Ovenstående alle lokaliseret 09.02.2015 på http://mikaelskaanstroem.dk/undervisningsoplaeg.htm

Undervisningsministeriet (2014): *Nye forenklede Fælles Mål i matematik*. Undervisningsministeriet. Findes via http://www.emu.dk/

Verdens største primtal 2013, lokaliseret 09.02.15 på http://www.livescience.com/26866-largest-prime-number-discovered.html

Morten Blomhøj
Institut for naturvidenskab og miljø
Roskilde Universitetscenter

Mikael Skånstrøm
VIA University College
Læreruddannelsen i Nr. Nissum