Hvad er IT i matematikundervisningen egentlig?

Professor, Ph.d. Morten Misfeldt,
Aalborg Universitet, København

Spørgsmål der afsøges

- Hvilke udfordringer og muligheder stiller digitale teknologier matematikuddannelsen overfor.
- Og hvordan skal ve se på disse teknologiers indflydelse på vores skolefag.

- Metode – jeg fortæller lidt om hvad jeg ser

Eksempler

- Funktionsundersøgelsen og desolve – problemer med meget teknologibrug
- Matematikskrivning og teknologi – blandet notation, identitet og uklare klasseregler
- GeoGebra, Wordmat og trekantsberegninger – problemer at undlade at bruge teknologi
- Programering og matematiklæring – muligheder – der skal gribes reflekteret

CAS og læringsvanskeligheder

CAS-INDUCED DIFFICULTIES IN LEARNING MATHEMATICS?

UFFE THOMAS JANKVIST, MORTEN MISFELDT

In Danish upper secondary school, Computer Algebra Systems (CAS) are now an integrated part of the teaching of mathematics. As university mathematics educators, we often hear upper secondary school mathematics teachers complain that CAS has not brought the promised wonders of deep mathematical understanding. Of course, this is probably a timeless complaint and one might expect that similar things were said when handheld calculators found their way into mathematics classrooms in the 1970s, or even earlier when tables replaced algorithms for calculating square roots. However, we recently encountered a different kind of concern from a mathematics teacher at one of the top upper secondary schools in the Copenhagen area. Having witnessed much of the introduction of CAS (*e.g.,* TI Nspire) in the upper secondary school mathematics program, this teacher told us that he had recently begun to see students have certain kinds of difficulties that he did not see when he first began as a teacher 15 years ago, and that he suspected that CAS was somehow responsible for them.

Scanning the mathematics education literature on using CAS in mathematics education, one soon finds that focus is mainly on the potentially positive impact that such use has in terms of mathematics teaching and learning [1]. A couple of decades ago, expectations were particularly high about what could be accomplished (*e.g.,* Dreyfus, 1994). Since then, research has increasingly focused on characterizing learning processes (*e.g.,* Artigue, 2002; Drijvers, 2003; Guin, Ruthven

the way, we also examine some existing studies on CAS use in mathematics education to support our claims. First, however, we look at an example provided to us by the upper secondary school teacher—an example which, together with the teacher's experiences of something qualitatively different taking place, provides a concrete starting point for our discussion.

An example of a potential difficulty

CAS entered the Danish upper secondary school program with the reforms of 2005. Use of CAS is not mandatory, but part of the written exams are constructed assuming that students have CAS tools at their disposal. One consequence of this policy is that the introduction of CAS in textbooks, as well as in teaching, is quite diverse, and different schools or even teachers may have their own policies about students' use of CAS. If Danish upper secondary school students take mathematics at the highest level, meaning that they have mathematics for all three years of upper secondary school, they will be introduced to differential equations in their third year, and hence also to the "desolve" command in CAS.

In the teacher's example, he gave his class a mock exam, including the task:

> Given $dN/dt = -16N + 32$ with initial value condition $N(10) = 1$, find an expression for $N(t)$ and account for N being an increasing function.

Now, before the reform of 2005, students would solve such

En opgave – og en banal fejl

- Givet dN /dt = –16N + 32 med randbetingelsen at N (10) = 1, find et ydtryk for N (t) og gør rede for at N er en voksende funktion.

$\mathrm{deSolve}(y'=-16\cdot y+32,x,y)$ $\quad y=c1\cdot e^{-16\cdot x}+2$

$\mathrm{deSolve}(y'=-16\cdot x+32,x,y)$ $\quad y=-8\cdot x^2+32\cdot x+c1$

Klassiske begreber om matematikforståelse

- Skemp:
  - Procedural og relationel forståelse
    - At vide hvad man skal gøre
    - At også vide hvorfor
  - CAS kan understøtte begge forståelsesmåder, og CAS gør problemerne med procedural forståelse værre.

CAS Procedural forståelse af ligniner og differential ligninger

- "if the problem involves something like an equation, then write solve (your problem, x) and hope for a solution that may be related to the problem formulation."
- "if the problem involves something like a differential equation then write desolve (your problem, f or y), where f or y is the name useden the problem formulation and hope for a solution which may be related to the problem formulation."

Tingsliggørelsens onde cirkel (Sfard 1991)

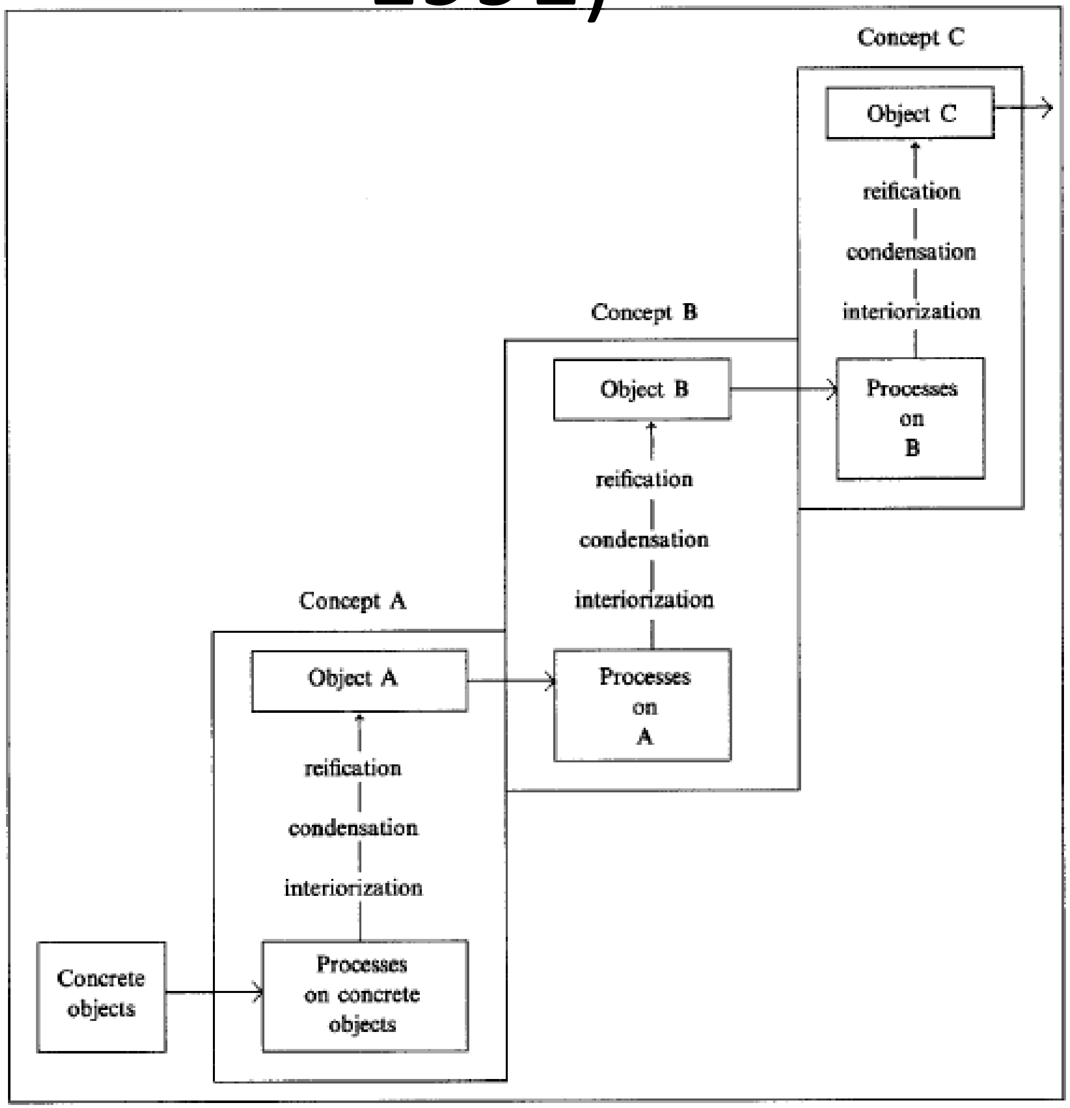


Fig. 4. General model of concept formation.

CAS-relaterede læringsvanskeligheder

- Procedural forståelse
- Matematisk ageren uden relationel forståelse muliggøres af CAS
- På denne måde bliver tingsliggørelsens onde cirkel til en ond spiral der tillader matematisk ageren uden matematisk forståelse

- Jankvist & Misfeldt (2015)

Klasseregler og klassekultur

- Forskellige lærere har forskelige “regler” for CAS brug (Iversen, 2014)
- Elever tænker over hvordan de skal præsentere sig igennem CAS brug

Opgave 2

En partikel bevæger sig i planen, så den til tidspunktet t befinder sig i punktet med koordinaterne $f(t)$, hvor $f(t) = \begin{pmatrix} (t-1)^2 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}$. Bestem de tidspunkter t, for hvilke

a) $f'(t) \cdot f''(t) = 0$
b) $f'(t) \perp f''(t)$
c) $f'(t) \parallel f''(t)$

A) Først differentier vi f(x) to gange for at finde den afledte og dens dobbelte afledte. Vi anvender maple:

$f(t) := [(t-1)^2, t^2 - 2t]$	$t \to [(t-1)^2, t^2 - 2t]$
$diff(f(t), t)$	$[2t-2, 2t-2]$
$g(t) := [2t-2, 2t-2]$	$t \to [2t-2, 2t-2]$
$diff(g(t), t)$	$[2, 2]$
$h(t) := [2, 2]$	$t \to [2, 2]$

Herefter kan vi løseligning, når prikproduktet af g(t) og h(t) skal blive nul.

$$\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t-2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(2t-2) + 2(2t-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4t - 4 + 4t - 2 = 0$$ eller i maple $> t = solve\left(\begin{bmatrix} 2t-2 \\ 2t-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0, t\right)$ $t = 1$

$$8t = 8$$

$$\underline{\underline{t = 1}}$$ ✓

CAS relaterede værdier og selvpræsentationer

- CAS hjælper med at løse opgaver
- Men CAS brug – eller ikke brug – viser også en en måde at gå til faget på.
- Dvs dimensioner omkring kommunikation, klassekultur og selvdannelse er centrale.
- Skiftende lærere?

Og så lige for at sikre vi ikke overfortolker

- CAS er en del af professionelt matematisk arbejde
  - "For den arbejdende matematiker er inddragelsen af computere en naturlig forlængelse af den måde hvorpå de altid har arbejdet. Computeren kan ses som et nyt og kraftfuldt redskab den matematiske tænkning kan distribueres hen over, men den er ikke for de matematikere vi snakkede med, en fundamental anderledes måde at erkende matematik på." (Johansen & Misfeldt 2014)
- CAS kan understøtte svage studerende rigtigt meget
  - *"...Hvor det er folk der er meget svage til matematik, det er folk der har haft det skidt med matematik det meste af deres barndom. Og at det jeg virkelig bruger mobiltelefonen til det er, den første gang, de første to gange jeg har dem, så kan jeg vise dem at de kan allerede lave matematik på hf niveau, og det giver dem ganske enkelt så utrolig meget selvtillid at selv de voksne mennesker tager deres opgaver med hjem og skal vise manden derhjemme hvad de har lært den her dag..." (Gjedde, Levinsen og Misfeldt 2012)*

Teknologiers emergente påvirkning – når fravalg af teknologi er valg

Trekantsberegninger og teknologi

– et eksempel på hvordan teknologi har (eller bør have) indflydelse på udvikling af Matematikcurriculum

Morten Misfeldt, *Institut for Læring og Filosofi, København, Aalborg Universitet*

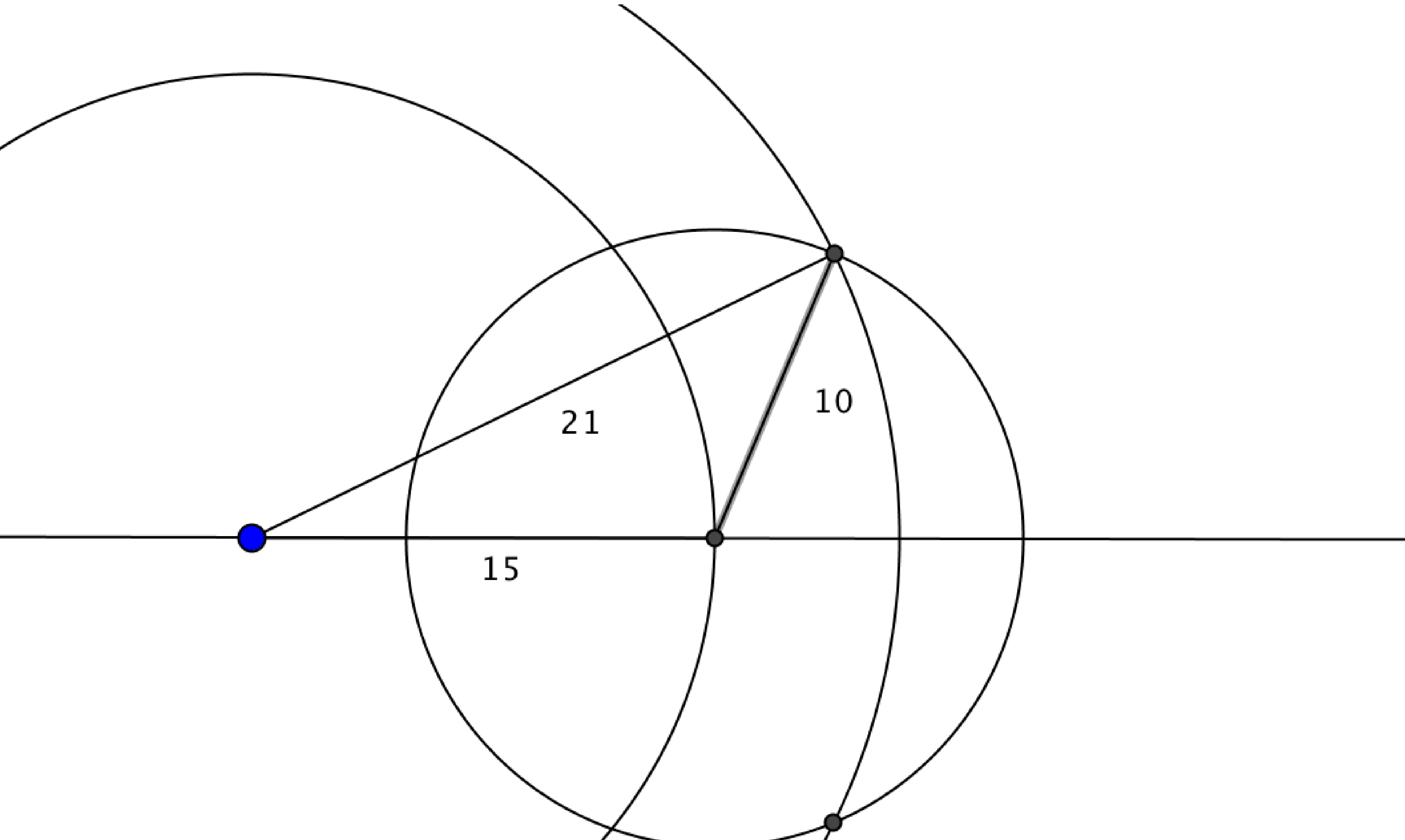
Abstract *I denne artikel undersøger jeg hvorvidt og hvordan indholdet af matematikundervisningen påvirkes af brugen af digital teknologi. Det gør jeg ved at analysere tre forskellige tilgange (trigonometriske, euklidiske og automatiserede) til trekantsberegninger. Mit teoretiske udgangspunkt er pragmatisk, og jeg bruger Deweys begreb om kontinuitet til at diskutere den uddannelsesmæssige værdi af de forskellige strategier samt hvilke strategier der kan anses for mest matematiske og fornuftige. Jeg konkluderer at alle tre strategier kan anses for matematisk korrekte, men at fremkomsten af digitale teknologier kan give anledning til en situation hvor nødvendigheden af trigonometriske løsningsstrategier er vanskelig at begrunde hvis ikke curriculum omorganiseres.*

Trekantsberegninger

- Nye værktøjer der kan håndtere trekantsberegninger
- Nyt curicullum (2009) der indførte trigonometriske trekantsberegninger i grundskolen

- ”I trekant ABC er a=10, b=15 og c=21, bestem vinkel A”

Euklidisk – med hjælp



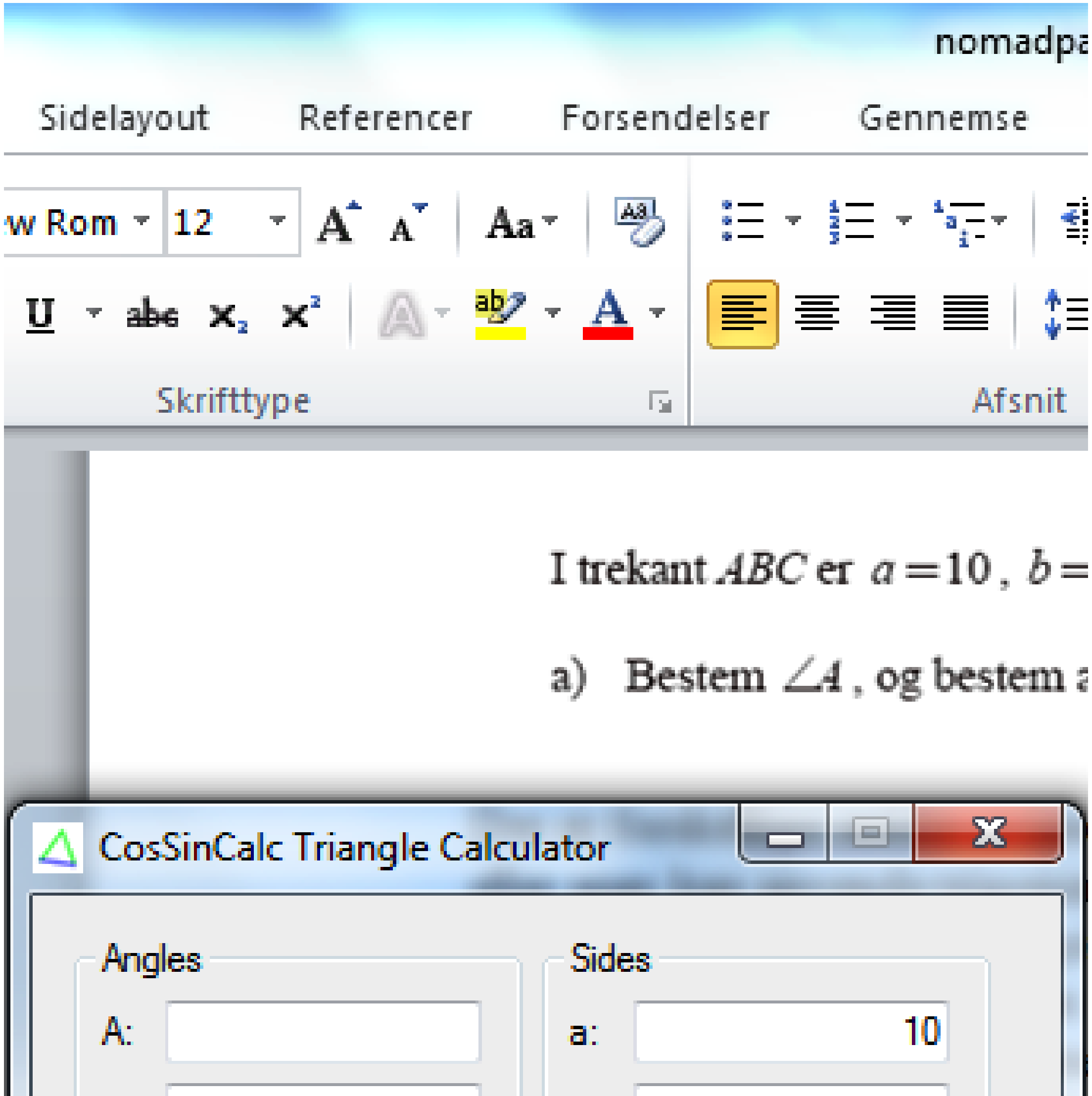
Algebraisk

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15.00^2 + 21.00^2 - 10.00^2}{2 \cdot 15.00 \cdot 21.00}\right) = 26.05^{\circ}$$

Automatisk


nomadpa
Sidelayout
Referencer
Forsendelser
Gennemse
w Rom
12
Skrifttype
Afsnit
I trekant ABC er a = 10 , b =
a) Bestem ∠A , og bestem
CosSinCalc Triangle Calculator
Angles
Sides
A:
a:
10

Nå ok – hvad er så bedst

- Hvordan sammenligner vi de forskellige tilgange
  - Hvad er rigtigst
  - Hvad er mest effektivt
  - Hvad lærer man mest af

Trekantsberegninger og teknologi

– et eksempel på hvordan teknologi har (eller bør have) indflydelse på udvikling af Matematikcurriculum

Morten Misfeldt, *Institut for Læring og Filosofi, København, Aalborg Universitet*

Hvad skal vi tage med fra dette eksempel

- Nye teknologier påvirker matematiundervisningen og matematiklæseplanen alene gennem deres tilstedeværelse i verden
- I dette tilfælde kan de trigonometriske funktioner miste matematisk relevans i arbejdet med simple trekanter
- Fastholdes opgaver der har mistet matematisk relevans bliver faget dummere og mere autoriatativt
- Man bør derfor kritisk undersøge curicullum for inflydelsen af digitale teknologier

Programmering

- Programing bliver en del af curriculum I flere lande for tiden. UK, Estland osv
- Der er en udbredt ide om at programmering og matematik hænger
  - Der er også en ide om at det har vi prøvet.
- Lad os se på hvad vi ved om matematiklæring gennem programmering

Litteratur review

- Elev som producent
- Tænke I algoritmer
- Abstrakt tænkning

- Misfeldt og Ejsing-Dunn (2015): programming to learn mathematics …. CERME 2015.

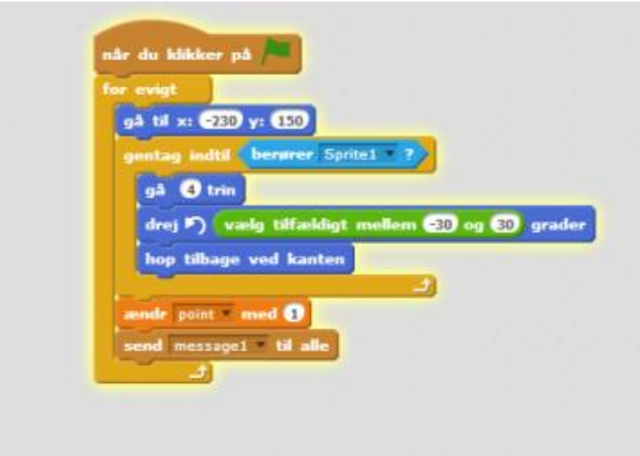
Tænke i processer og algoritmer

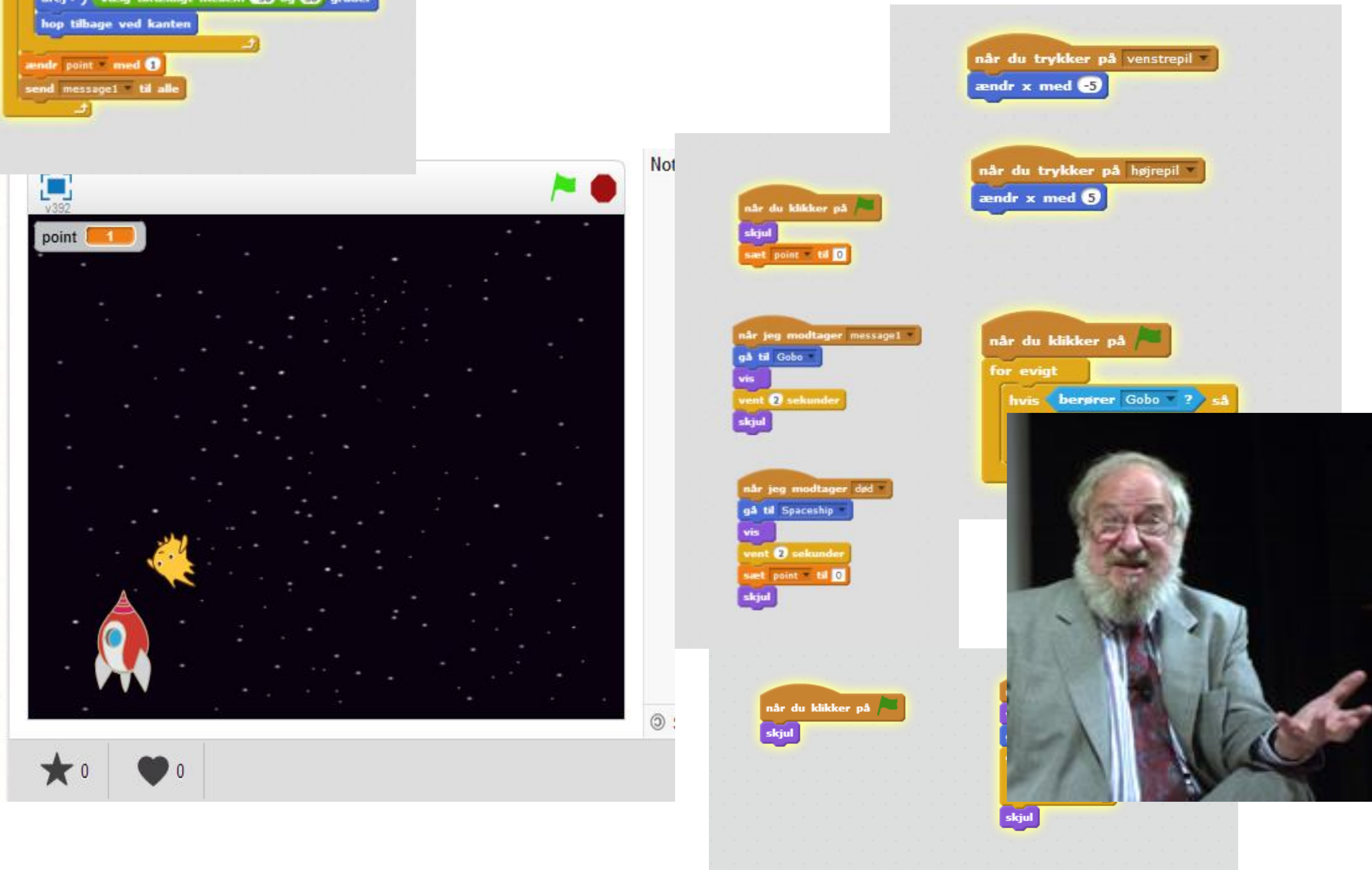
- Tegn en trekant, en firkant og en cirkel i scratch

- AT: (1) representation, (2) reduction, (3) abstract reasoning, (4) information structures, and (5) algorithms.
- MT: all of the above plus (a) formula manipulation, (b) behaviour of functions, (c) dealing with infinity, and (d) generalization.

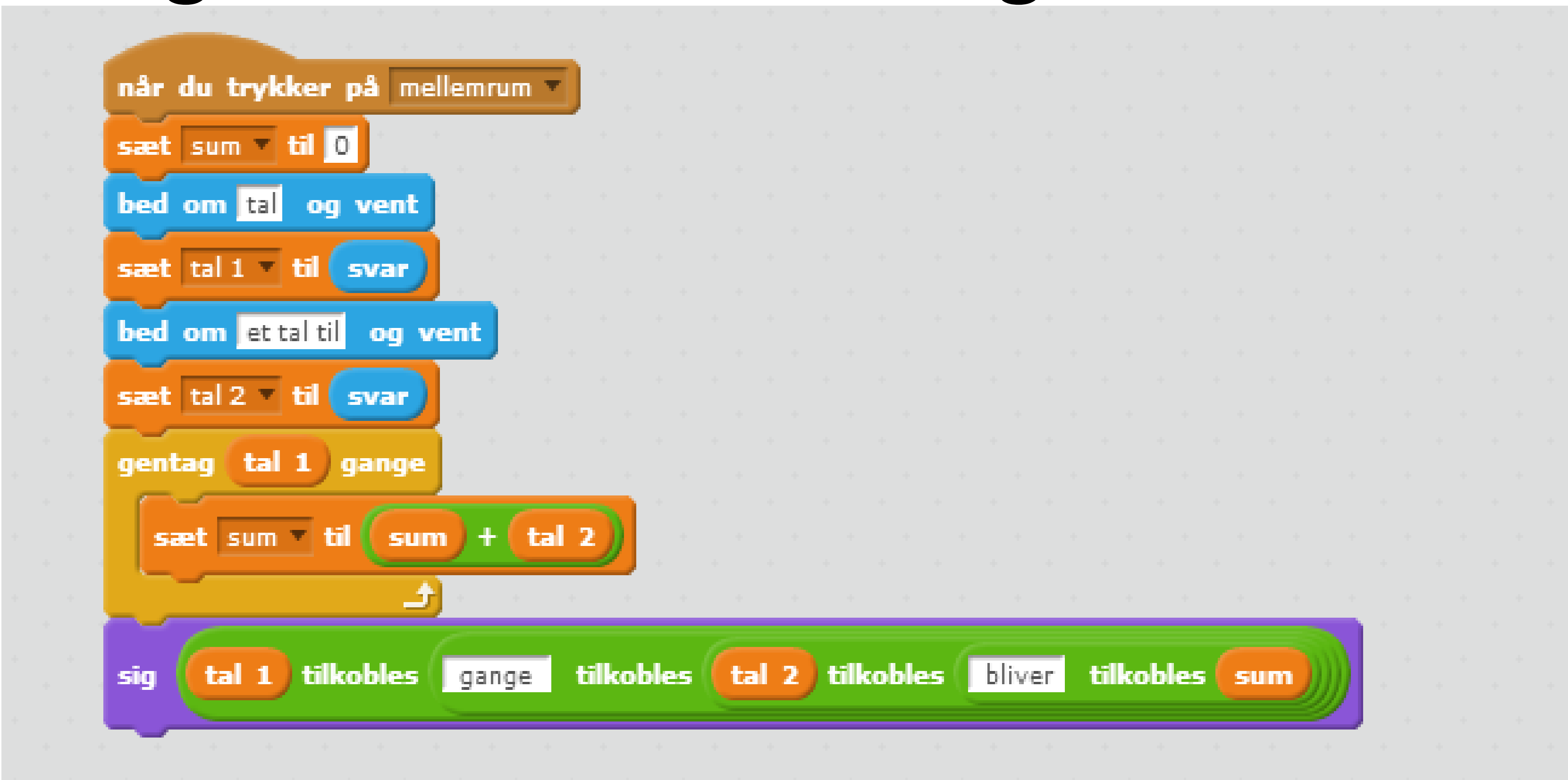
Donald Knuth 1985

Digital produktion





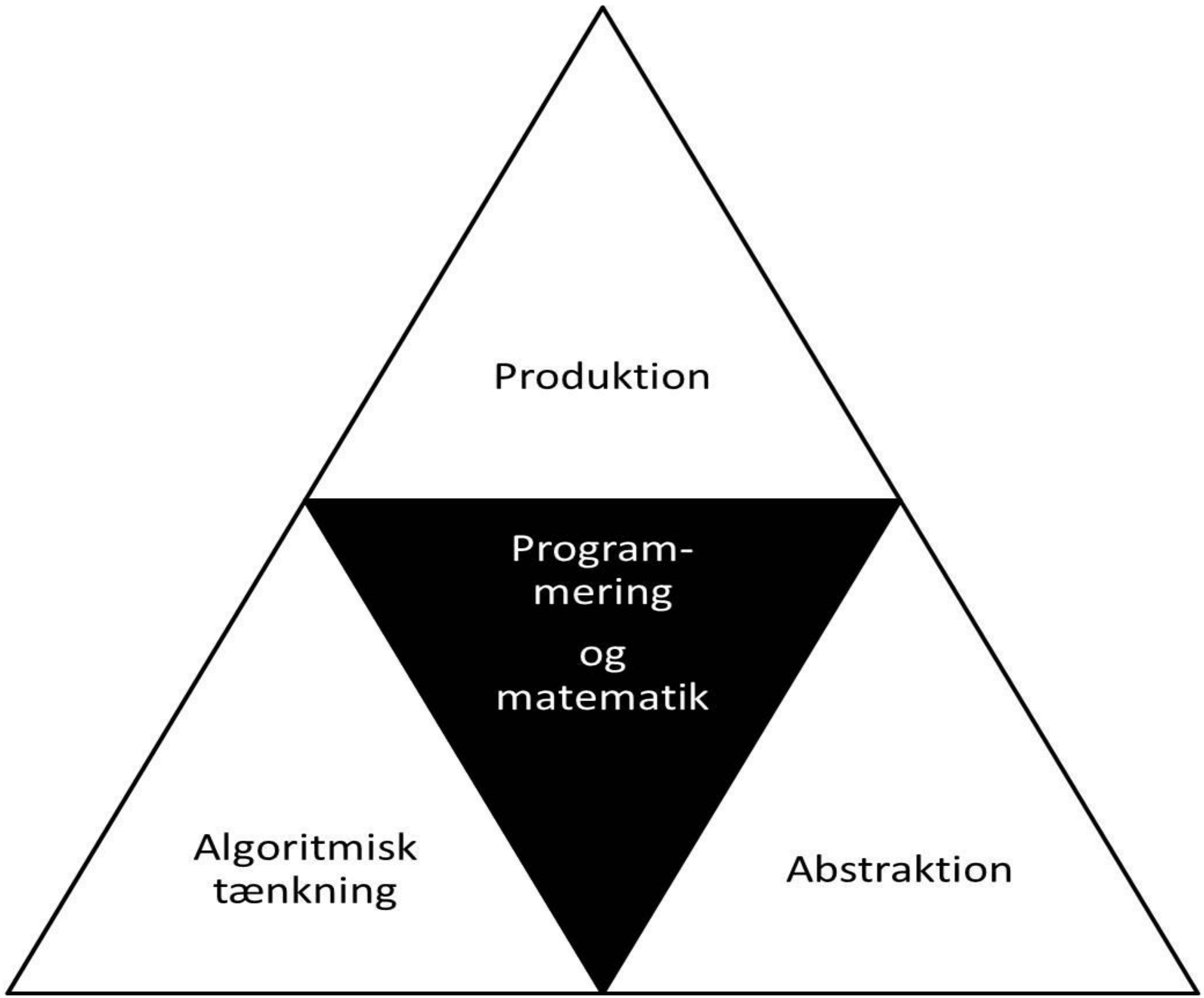
abstrakt tænkning og begrebsforståelse: Gange maskine



Dubinsky (1992)
Skemp on relational understanding
Sfard (1991) and Dubinsky on reification and process object duality

Case: varialble

Programmering vs matematik

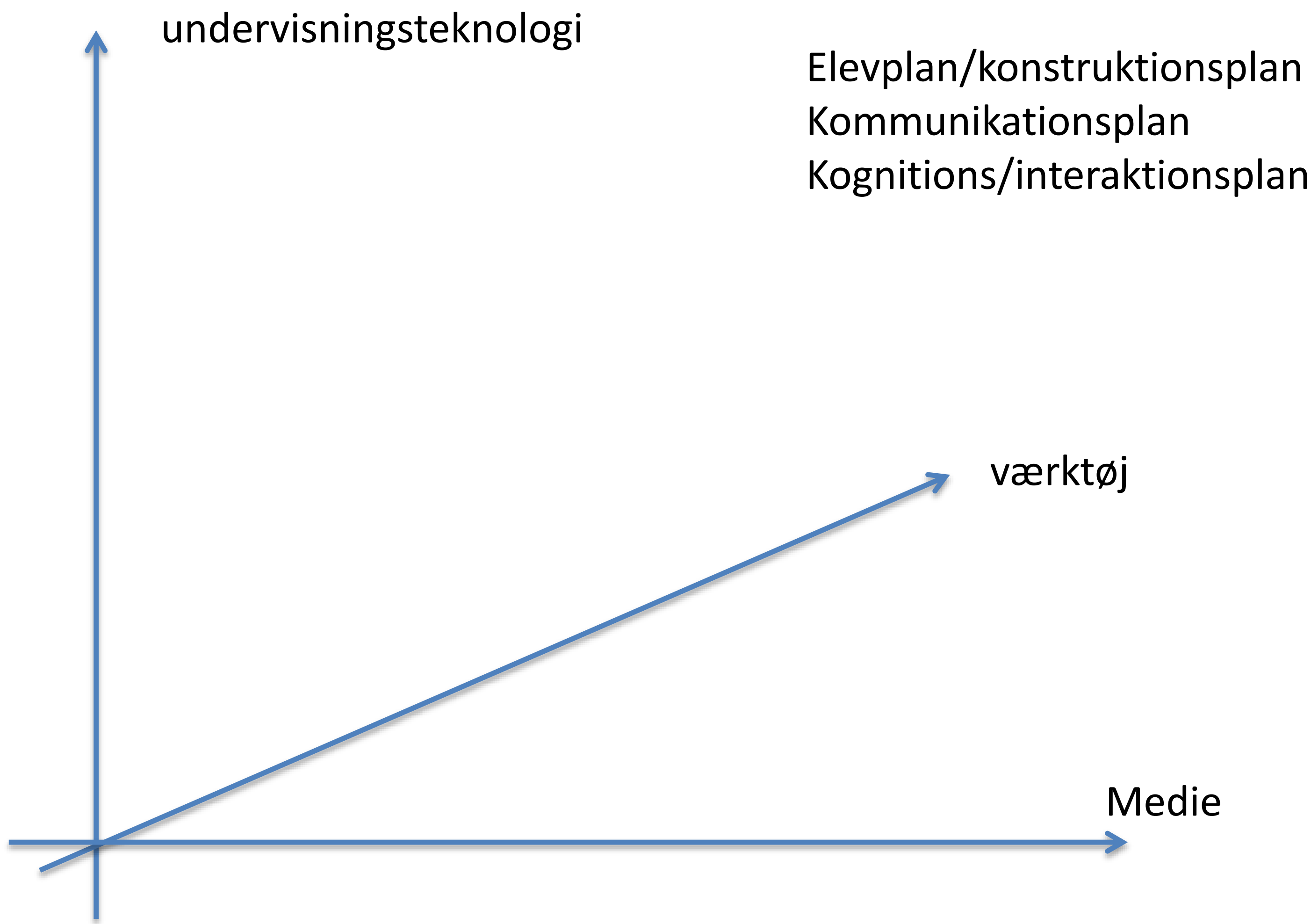


Tre metaforer for IT i forbindelse med matematikundervisning

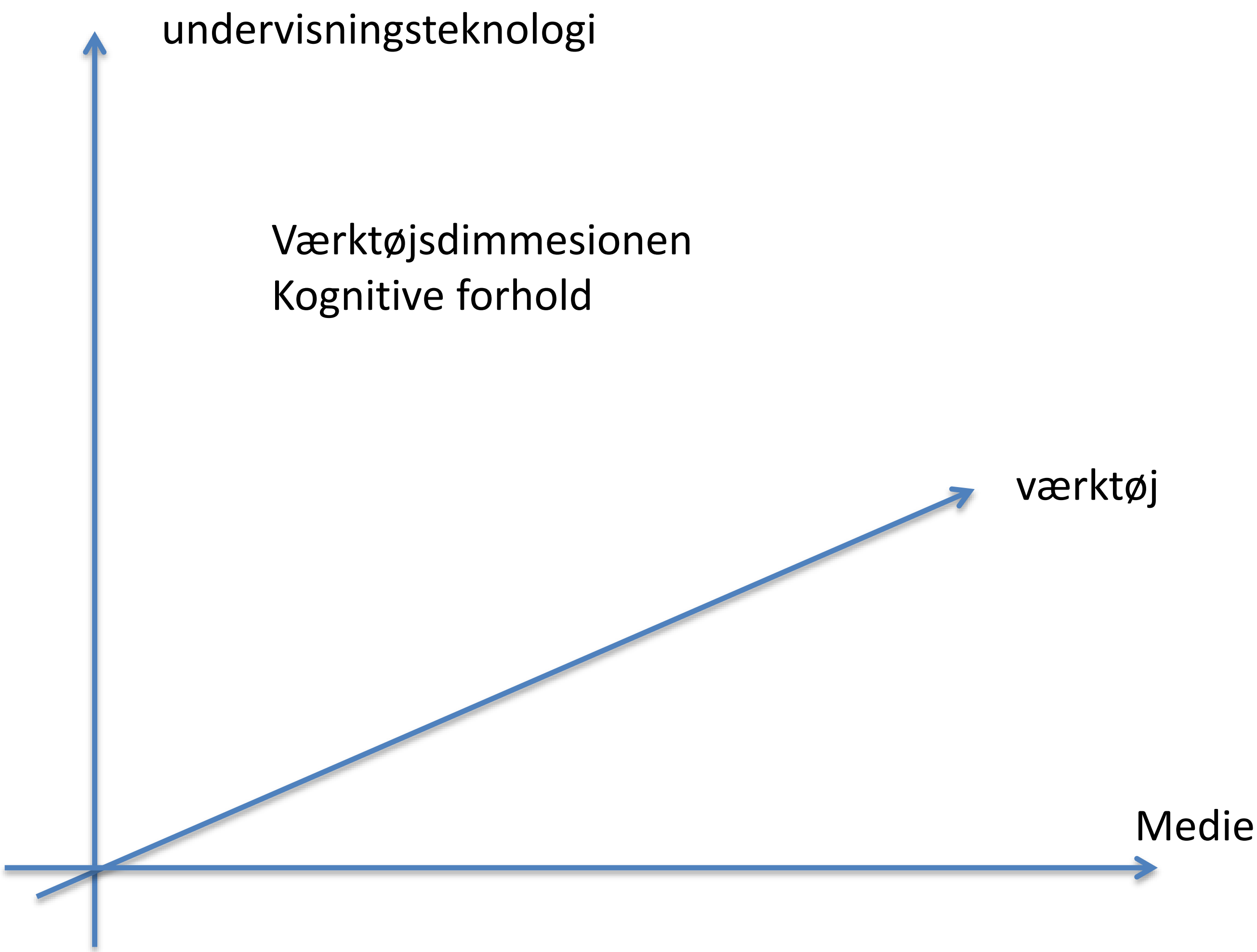
- Værktøj
- Medie
- Undervisningsteknologi

- Ikke gensidigt udelukkende kategorier, men snarere en basis for rummet af IT I matematikundervisning

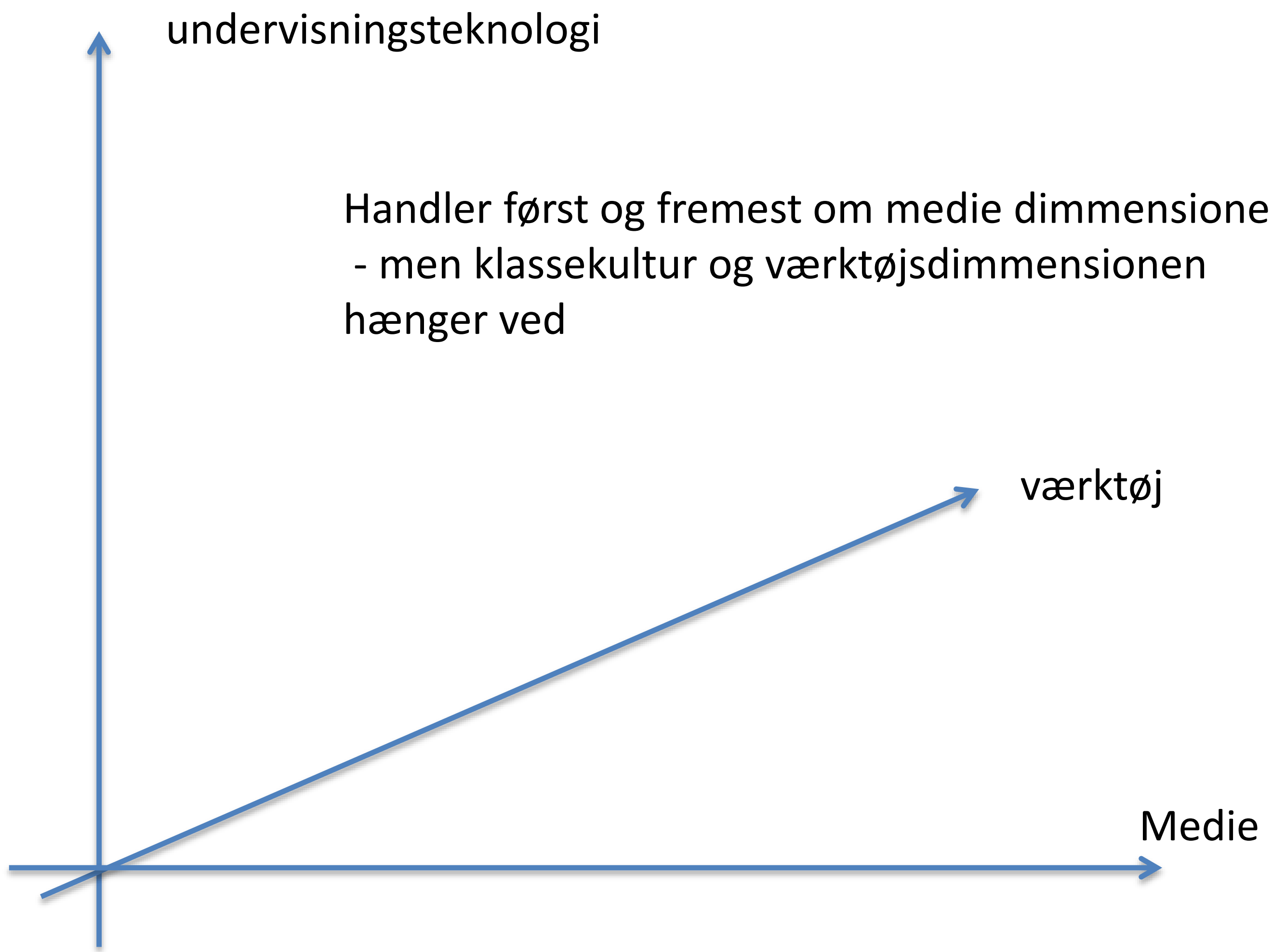
De tre metaforer som dimmensioner



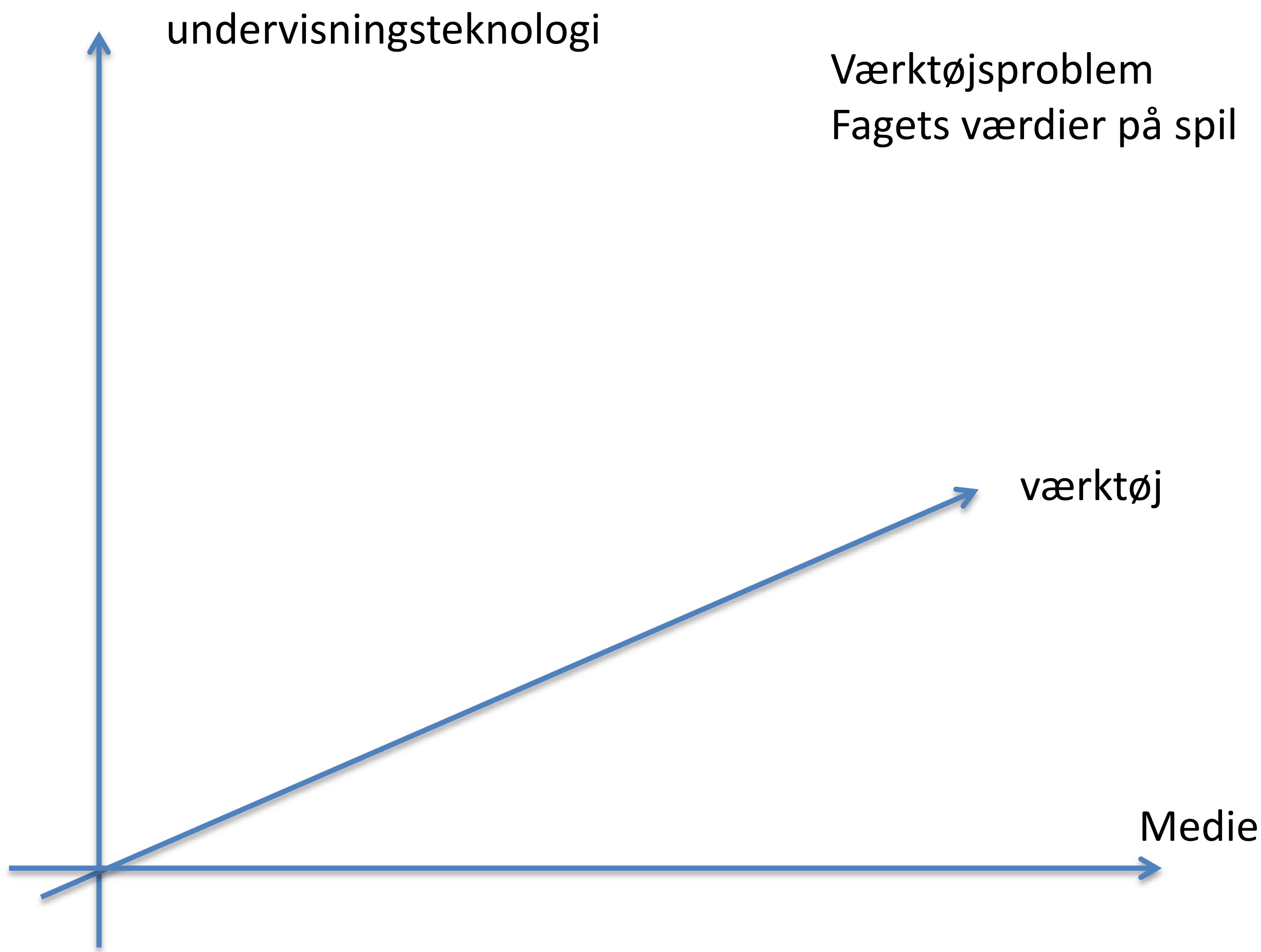
CAS vanskeligheder



CAS og skrivning



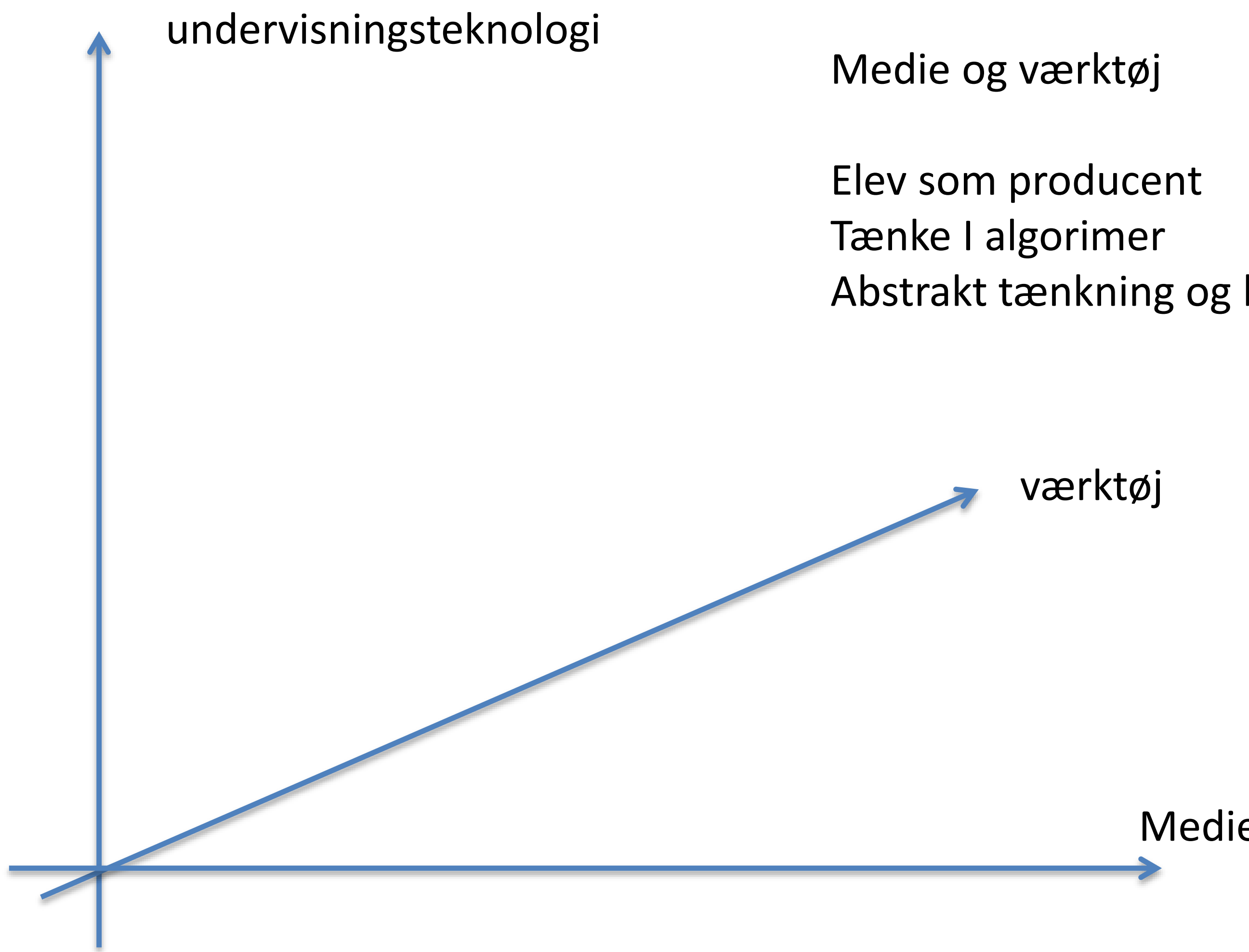
Trekanstberegninger



Programmering

Medie og værktøj

Elev som producent
Tænke I algorimer
Abstrakt tænkning og begreber



Konklusion

- Digitale teknologier forandrer matematikundervisning på mange planer
- Vi kan/bør se muligheder og problemer I kontinuitet/samspil med vores ideer om hvad matematik og matematikundervisning er – uden at fagopfattelsen stivner I bestemte begreber eller opgaver, og uden brud på eksisterende fagopfattelser.