

# Hvorfor er matematik på skemaet?

Henrik Kragh Sørensen

Institut for Naturfagernes Didaktik  
Københavns Universitet

Matematik på ældste trin  
Danmarks Matematiklærerforening & Forlaget MATEMATIK ApS  
Odense Congress Center, 26. april 2018

## Dette indlægs struktur

- Del 1: Hvis dannelse er svaret, hvad er så problemet?
- Del 2: Hvad er matematisk dannelse overhovedet? En første approksimation
- Del 3: Generaliseret aritmetik: Skal eleverne kunne mere end at regne?
- Del 4: Matematisk modellering: Kan eleverne skelne model fra virkelighed?
- Del 5: Matematisk udforskning: Kan eleverne se verden matematisk?
- Del 6: Opsamling: Matematik og dannelse



H. K. Sørensen (mar. 2017). *Tal. Tænkepauser: Viden til hverdagen* 47. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag.

## Del I

Hvis dannelse er svaret, hvad er så problemet?

CNN, 12. marts 2017



President Trump's budget director claims the Obama administration was "manipulating" jobs data.

<https://goo.gl/XidCQ1>

## Matematisk dannelse: Hvorfor nu det?

- Matematisk (og naturvidenskabelig) dannelse har politisk bevågenhed
- Men er dannelse noget man besidder/har eller noget man udøver/er?
- Herunder: Hvilken rolle spiller (faglig) viden?
- Matematisk og naturvidenskabelig dannelse: hvorfor?
  - 1 Lærebøger giver billede af videnskab som absolut og indiskutabel (positivisme, ready-made-science).
  - 2 Aviser giver billede af videnskabens (totale) usikkerhed ("alternative facts") og relativistisk (post-moderne, science-in-the-making).
  - 3 Konflikten mellem de ekstreme positioner nødvendiggør en reflekteret mellemposition (dannelse): Hvad ved man? Hvordan ved man det? Hvor sikker er den viden? Hvordan kan man selv producere den (slags) viden? Hvem kan man stole (mest) på om den viden?

H. K. Sørensen (mar. 2017). *Tal. Tænkepauser: Viden til hverdagen 47*. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag.

## Del II

Hvad er matematisk dannelse overhovedet? En første approksimation

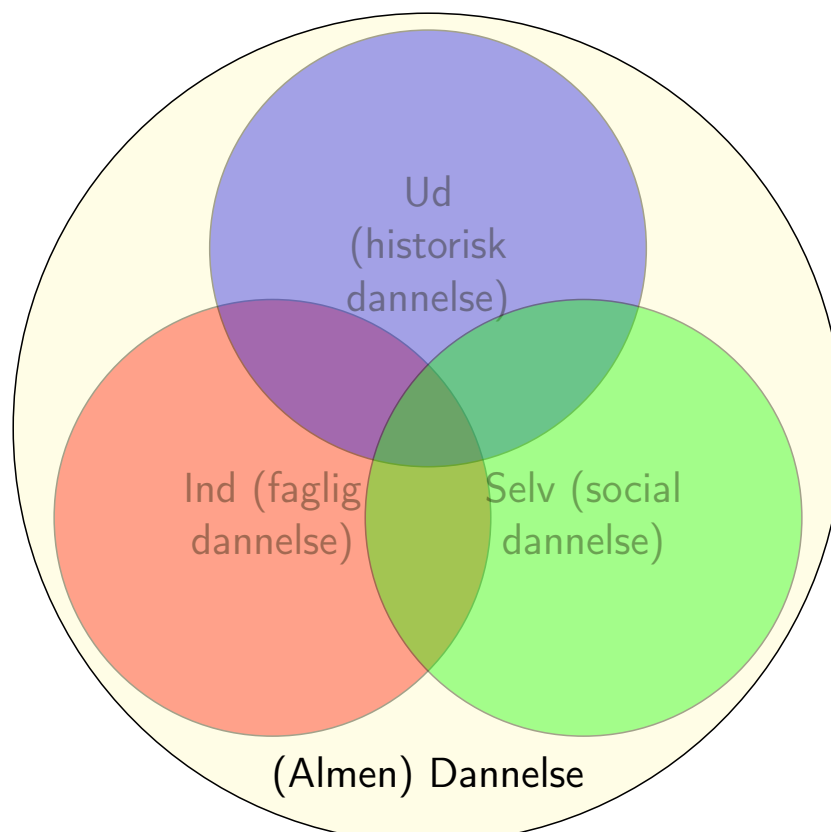
## Naturvidenskabelig dannelse

Det naturvidenskabeligt dannede menneske:

- **har naturvidenskabelig viden i bred forstand:** både viden om indhold og færdighed i metoder.
- **har en fornemmelse for naturvidenskabernes historie:** forståelse for, at viden ikke er en statisk størrelse, men at den udvikles løbende og bidrager til den samfundsmæssige, kulturelle og teknologiske udvikling.
- **er kritisk:** kender naturfagernes begrænsninger og muligheder og kan derfor se fagene i forhold til andre fagområder.
- **har selvforståelse:** forholder sig til hvilken rolle man spiller i verden og hvordan den verden, man er del af, har betydning for hvem man er.
- **forholder sig personligt:** tænker på naturvidenskab som vedkommende og relevant.
- **udvikler sig som menneske:** bruger naturvidenskabelige fag til at udvide sin horisont med, til at tage stilling og danne meninger med, og i sidste ende til at sikre at man kan agere med myndighed.

J. Dolin, L. B. Jacobsen, S. B. Jensen og B. F. Johannsen (dec. 2016). *Evaluering af naturvidenskabelig almindelig dannelse i stx- og hf- uddannelserne*. [MONA Forskningsrapportserie](#)

## Matematisk og naturvidenskabelig dannelse



## Fagsyn

## Formål med fagundervisning

Autoritær

Formålet er at tillære basale færdigheder og social opdragelse i lydighed og autoritetstro.

Industricentreret

Formålet er at lære basale færdigheder og lære at løse praktiske problemer med faget.

Fagcentreret (old humanist)

Formålet er at opnå forståelse og evner i avanceret grene af faget samt en vis værdsættelse af faget.

Elevcentreret

Formålet er at opnå selvtillid, kreativitet og selvudtrykkelse gennem faget.

Ligestillingscentreret

Formålet er at bemyndige den lærerende som kritisk og fagligt bogligt dannet borger i et moderne samfund.

## Matematik ifølge Salmonsens Leksikon

*Matematik (gr.). Den rene M.'s væsentlige Genstand er Egenskaberne ved Tallene og Formerne i Rummet samt de nøjagtige Relationer imellem dem, hvad Størrelse og Beliggenhed angaar. Den gaar ud fra visse Aksiomer og opfører paa dem en stringent logisk Lærebygning. Store Afsnit af den rene M. er opstaaede som nødvendige for Behandlingen af praktiske Opgaver, men naar dens Dyrkere har udvidet den langt ud over, hvad der i Øjeblikket kan ses at tjene saadanne Hensyn, skyldes det, foruden alm. Erkendelsestrang, den Tilfredsstillelse, som de mat. Resultaters Harmoni og absolutte Paalidelighed giver. Den rene M. er i alle Lande anerkendt som et fortrinligt pædagogisk Middel, der udvikler stringent Tænkning og Evne til nøjagtig Beskrivelse.*

C. Crone (1924). "Matematik". I: *Salmonsens Konversations Leksikon*. Udg. af C. Blangstrup. 2. udg. Bd. 16. 26 bd. København: J. H. Schultz A/S, s. 751–753.

“Hvor det tidligere var tilfældet, at mennesker var nødt til at beherske de færdigheder i beregning, der var nødvendige for at *gennemføre* forskellige matematiske procedurer [. . .], så er det idag påkrævet at have en *tilstrækkelig dyb forståelse* af disse procedurer og de underliggende principper, som de bygger på, for at *vide hvornår og hvordan man kan bruge digitale værktøjer effektivt, produktivt og sikkert.*”

- Talforståelse (number sense): Tænke og argumentere fleksibelt med tal, bruge tal til at løse problemer, identificere mærkelige resultater, forstå hvordan tal kan skilles og samles på forskellige måder, regne i hovedet, og lave fornuftige estimater.
- Matematisk tænkning (mathematical thinking): Mere end at være i stand til at regne eller løse ligninger. Matematisk tænkning er en måde at se på ting, at reducere dem til deres kvantitative, strukturelle eller logiske essenser og analysere de underliggende mønstre. Endvidere omfatter det at man *påtager sig identitet* som en matematisk tænder.

### En første syntese

- A Til matematisk dannelse hører at forstå at og hvordan matematik er *resultatet af en menneskelig, kreativ udvikling*, som både er *motiveret af problemløsning og “erkendelsestrang”*. Derfor er matematisk dannelse også af en historisk og æstetisk karakter.
- B Til matematisk dannelse hører at opleve, hvordan matematik på samme tid er en *fri proces og bundet af stringens*, betinget af tradition og af tilgængelige kognitive redskaber. Derfor kan *kendskab til udvalgte matematiske resultater være dannende i sig selv*, og en reflektiv tilgang til matematisk værktøjsbrug er dannende.
- C Til matematisk dannelse hører at forstå og opleve, at *matematik er et værktøj* (et sprog, et filter), som man med succes *kan bruge til at strukturere, forstå og i sidste ende kontrollere verden* omkring os.
- D Og til matematisk dannelse hører at *forstå og kritisk at kunne forholde sig til begrænsningerne i matematiske og statistiske udsagn*. Dette involverer både erkendelse af matematiske modellers ontologiske status, kritisk diskussion af modelleringsprocessens valg og kontekst, og en faglig forståelse af den statiske behandling af data. Dette fører desuden til en etisk forpligtelse til at lade sin ekspertise komme i spil.

	A: Problem-løsning	B: Erkendelsestrang	C: Forståelse af verden	D: Kritisk dannelse og etisk ansvar
1	Generaliseret aritmetik		Euler	
2	Heron	Kildecntreret matematikhistorie		Verhulst
3	Fx <i>Invitation til matematikkens videnskabsteori</i>			

## Del III

Generaliseret aritmetik: Skal eleverne kunne mere end at regne?

$$\begin{aligned}(2 \times n) \times 6 &= 2 \times n \times (5 + 1) \\ &= 10 \times n + 2 \times n\end{aligned}$$

## Færdigheder og (strukturel) forståelse

Er udsagnet “ $46 + 23 = 47 + 22$ ” sandt eller falsk?

**Beregning:** Udregning viser:  $46 + 23 = 69$  og  $47 + 22 = 69$ .

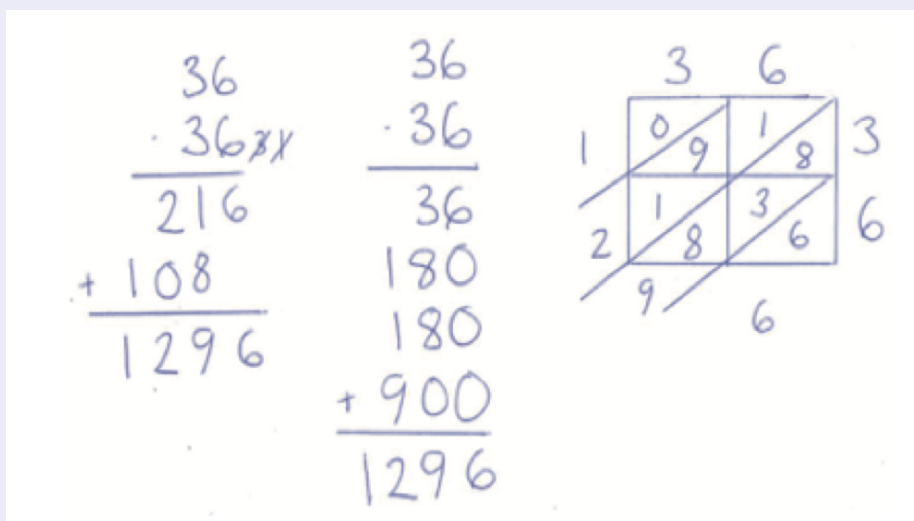
**Struktur:** Udsagnet er sandt: man lægger 1 til 46 og trækker 1 fra 23.

K. Bråting, K. Hemmi og L. Madej (2018). “Teoretiska och praktiska perspektiv på generaliserad aritmetik”. I: *The eleventh research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, MADIF 11, January 23–24, 2018, Karlstads universitet*. Accepteret.



# Multiplikation på mange måder

## Udregning af $36 \times 36$ (i hånden)



$$(\square + \square)^2 = \square^2 + 2 \times \square \times \square + \square^2$$

K. Bråting og L. Madej (2017). "Generaliserad aritmetik. En bro mellan aritmetik och algebra". *Nämnamn*, nr. 4, s. 81–86.



<https://goo.gl/vf6CSw>

# Babylonske positionstalsystemer

	10		20		30		40		50		
1		11		21		31		41		51	
2		12		22		32		42		52	
3		13		23		33		43		53	
4		14		24		34		44		54	
5		15		25		35		45		55	
6		16		26		36		46		56	
7		17		27		37		47		57	
8		18		28		38		48		58	
9		19		29		39		49		59	

# En babylonsk hjælpetavle

I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
2	30	9	6,40	20	3	36	1,40	1	1
3	20	10	6	24	2,30	40	1,30	1,4	56,15
4	15	12	5	25	2,24	45	1,20	1,12	50
5	12	15	4	27	2,13,20	48	1,15	1,15	48
6	10	16	3,45	30	2	50	1,12	1,20	45
8	7,30	18	3,20	32	1,52,30	54	1,6,40	1,21	44,26,40

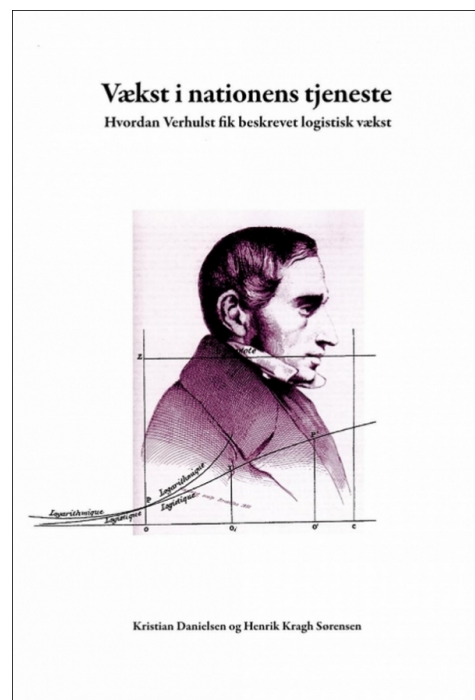
## Del IV

# Matematisk modellering: Kan eleverne skelne model fra virkelighed?

## Verhulst i 1830'ernes og 1840'ernes Belgien



Pierre-François Verhulst (1804–1849)



K. Danielsen og H. K. Sørensen (2014). *Vækst i nationens tjeneste. Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. København: Matematiklærerfore-

## §10: Differentialligning og dæmpning

Lad  $p$  være en befolkning: lad  $dp$  være den uendeligt lille befolkningsvækst, der forekommer i det uendeligt lille tidsrum  $dt$ . Hvis befolkningen vokser eksponentielt, får vi ligningen  $\frac{dp}{dt} = mp$ . Men eftersom hastigheden af befolkningsvæksten falder med størrelsen af befolkningen, er vi nødt til at trække en ukendt funktion af  $p$  fra  $mp$ , således at formlen bliver

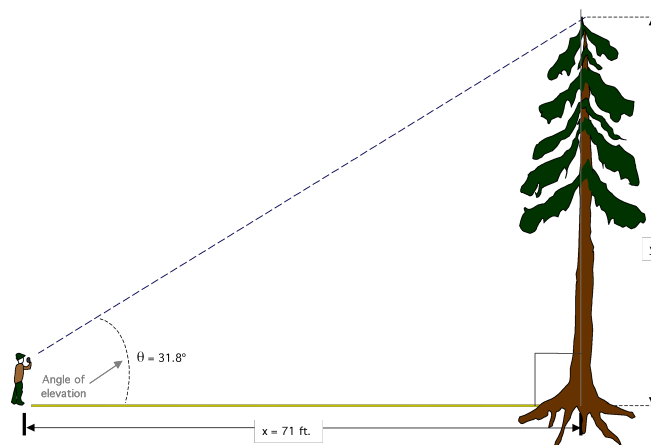
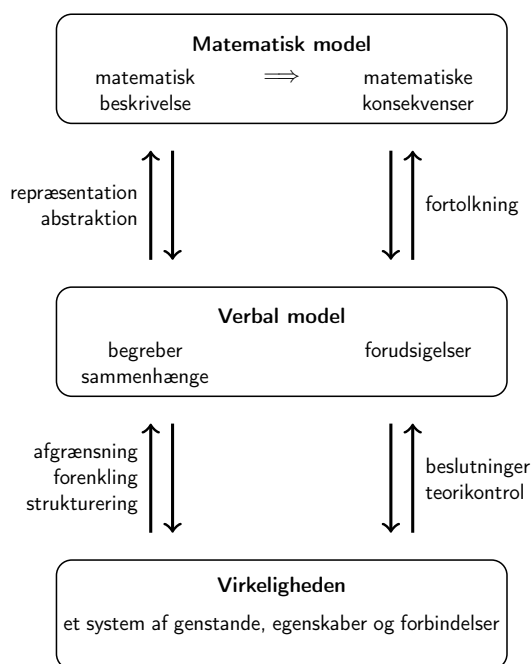
$$\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p).$$

Den mest simple funktion  $\varphi$ , man kan tænke sig, er at antage  $\varphi(p) = np^2$ . Ved integration finder man nedenstående ligning

$$t = \frac{1}{m} [\log.p - \log.(m - np)] + \text{konstant},$$

og man behøver da kun tre observationer for at bestemme de to koefficienter  $n$  og  $m$  og den vilkårlige konstant.

## Matematisk modellering



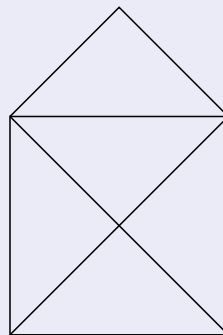
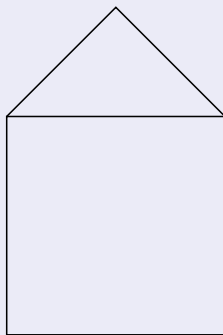
M. W. Johansen og H. K. Sørensen (2018). "Modelvalg og ansvar". *Aktuel Naturvidenskab*, nr. 1, s. 36–39.

## Del V

### Matematisk udforskning: Kan eleverne se verden matematisk?

#### Tegn et hus

Kan du — uden at løfte blyanten og uden at trække samme streg mere end een gang — tegne et hus som hver af disse? Hvordan?

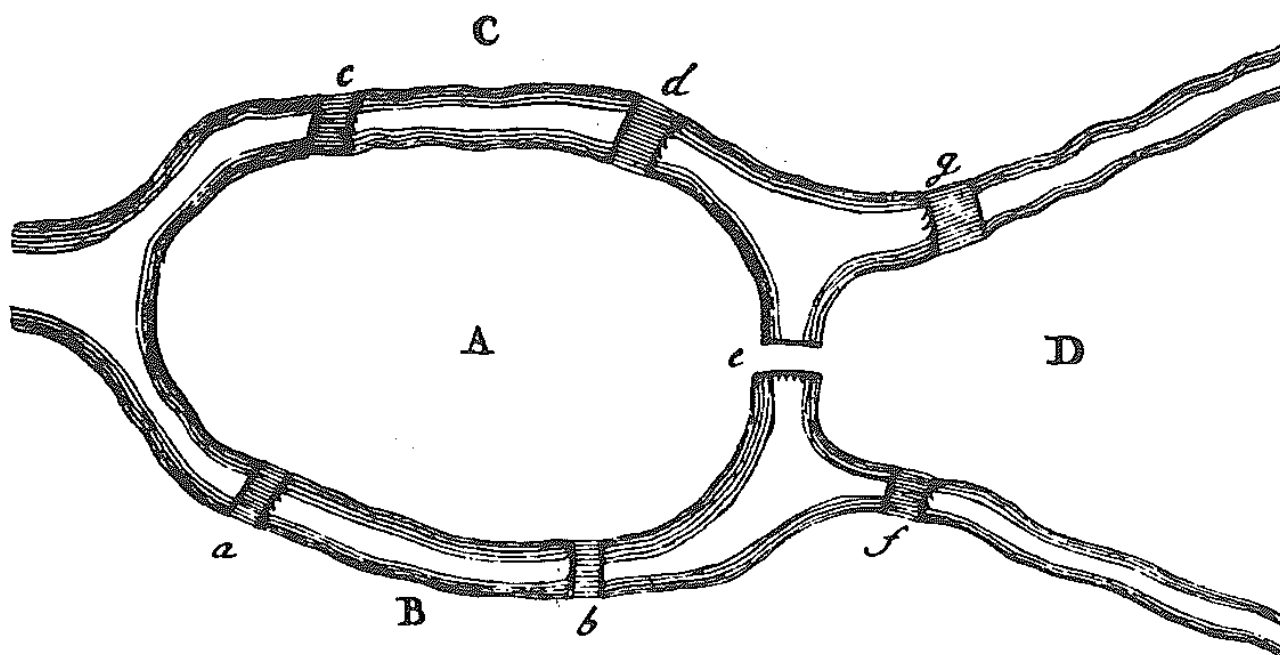


## Lav en bordplan

Den første dag i en ny, sammenbragt 8. klasse starter med en fælles morgenmad omkring et langt bord. Eleverne har på forhånd angivet, hvad de bruger deres fritid på. Hvordan skal bordplanen være, hvis alle elever skal sidde imellem to klassekammerater, som de deler interesse med?

Inter. navn	Emil	Clara	Peter	Marie	Anna	Ludvig	Celine	Mads	Ejgil
Politisk aktiv	x				x				x
Musik	x						x		
Fodbold	x					x			
Billedkunst		x			x				
Skater			x					x	
Basket			x			x			
Fitness			x		x	x			
Bøger		x		x					x
DYI, krea				x			x		

## Broerne i Königsberg

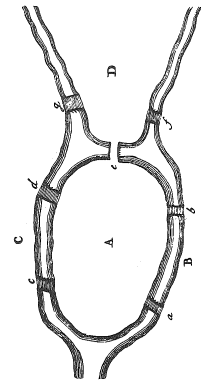


Euler 1736

## Euler 1736, §14

Først betegner jeg de enkelte områder, der er adskilt fra hinanden af vandet, med bogstaverne A, B, C osv. For det andet tager jeg det totale antal broer, øger det med én, og sætter resultatet øverst. For det tredje skriver jeg de enkelte bogstaver A, B, C osv. under hinanden, og ved hvert af disse skriver jeg antallet broer, der fører til [netop] det område. For det fjerde sætter jeg en asterisk ved de bogstaver, der har lige tal skrevet ved sig. For det femte føjer jeg til hvert af disse lige tal halvdelen [af dette tal], men ved [hvert] ulige [tal] skriver jeg halvdelen af det samme [tal] øget med én. For det sjette lægger jeg de sidst skrevne tal [dvs. den sidste kolonne] sammen; hvis summen er én mindre end, eller lig tallet som er sat øverst, så slutter jeg, at den ønskede gennemfart kan udføres. Men det må bemærkes, at hvis den fundne sum er én mindre end tallet, der står øverst, så må ruten begynde i et område, der er mærket med en asterisk, men i modsat fald [må den begynde] i et område, der ikke er mærket [med en asterisk], hvis summen er lig det øverst skrevne tal.

		8
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2
		9



# Matematisk problemløsning

## Euler 1736, §20

Dermed vil man i ethvert givet tilfælde lettest kunne finde ud af, hvorvidt én krydsning over alle broer kan udføres eller ej, ved hjælp af følgende regel: Hvis der er mere end to områder, hvortil et ulige antal broer fører, så kan det bestemt fastslås, at en sådan gennemfart ikke kan gøres. Hvis imidlertid der kun er to områder, hvortil et ulige antal broer fører, da kan gennemfarten udføres, hvis ruten begynder i ét af disse områder. Hvis endelig der ikke er nogle af alle disse områder, hvortil et ulige antal broer fører, så kan den ønskede gennemfart udføres, uanset hvor ruten begynder. Således løser da den givne regel fuldstændigt det opsatte problem.

# Eulers stier og matematisk tænkning

- Netværk åbner for udforskende tilgang:
  - ▶ Ingen nødvendig forudgående teori.
  - ▶ Begrænset kendskab fra folkeskolen.
  - ▶ Notation kan introduceres efter behov.
  - ▶ Nemt at komme med nye hypoteser.
- Kan lægge an til algoritmisk tænkning.
- Kan forbindes til hverdagserfaringer.
- Kan udvides til endog meget komplicerede emner.



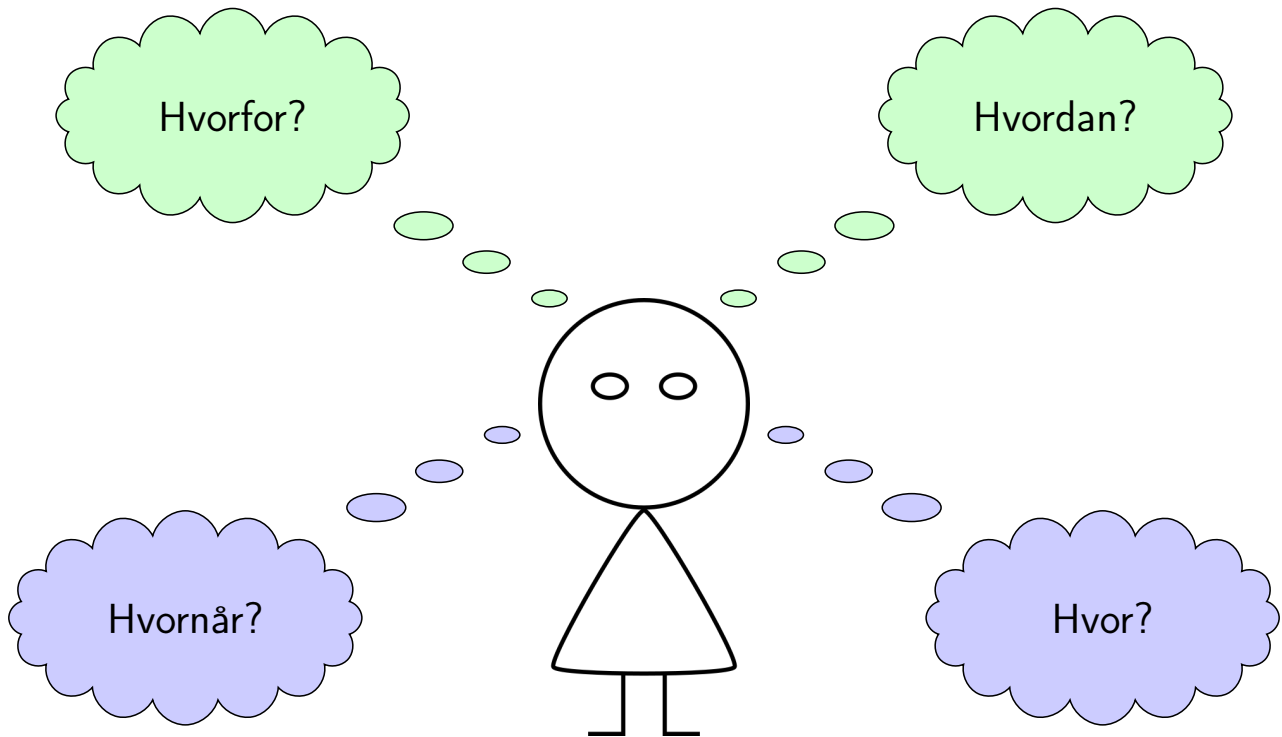
Leonhard Euler (1707–1783)

T. Britz, K. Danielsen, B. E. Jessen og H. K. Sørensen (2017). "Eulers stier. Hvordan en schweizer gik på opdagelse i Königsberg". Materiale til kildecentreret matematikhistorie i gymnasiet. Under udarbejdelse.

## Del VI

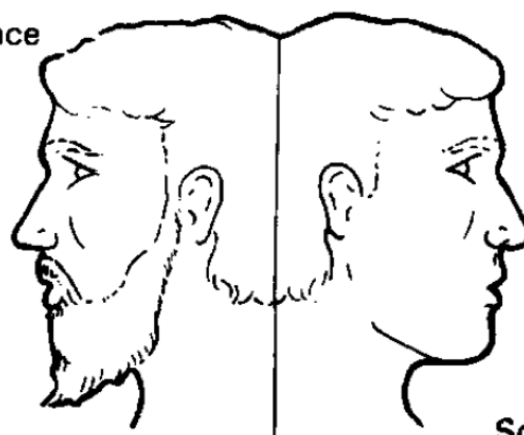
### Opsamling: Matematik og dannelse





## 'Ready-made mathematics vs. Mathematics in the making'

Ready Made Science



Science in the Making

- Latour: *Science in Action*

**MEN:** "Alternativet til absolut sikkerhed er ikke absolut usikkerhed"

## Oplæg til diskussion og videre tænkning

Ville I finde det relevant og muligt, at ...

- ... bruge det babylonske talsystem til at udfordre elevernes forståelse af positionstalsystemet, og herunder *især* bruge reciprok-tabellen til at adressere 'generaliseret aritmetik'?
- ... bruge Euler-kilden til at adressere og udfordre elevernes udforskning af diskrete matematikproblemer? Hvordan ville I situere det for elever?
- ... inddrage et "mathematics in the making"-perspektiv på matematisk modellering i undervisning af elever, herunder *især* diskutere den dialektiske og iterative karakter illustreret i model-figuren?
- ...











**Hvis I vil 'lege med mig', så hører jeg også meget gerne fra jer — jeg vil nemlig meget gerne 'lege videre' med folkeskolen**

H. K. Sørensen og M. W. Johansen. "Matematisk dannelse for det 21. århundrede". *Tidsskriftet MATEMATIK*. Accepteret.

## Tak for jeres opmærksomhed



## Nogle referencer

-  Britz, T., K. Danielsen, B. E. Jessen og H. K. Sørensen (2017). "Eulers stier. Hvordan en schweizer gik på opdagelse i Königsberg". Materiale til kildecentreret matematikhistorie i gymnasiet. Under udarbejdelse.
-  Bråting, K., K. Hemmi og L. Madej (2018). "Teoretiska och praktiska perspektiv på generaliserad aritmetik". I: *The eleventh research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, MADIF 11, January 23–24, 2018, Karlstads universitet*. Accepteret.
-  Bråting, K. og L. Madej (2017). "Generaliserad aritmetik. En bro mellan aritmetik och algebra". *Nämnamn*, nr. 4, s. 81–86.
-  Danielsen, K. og H. K. Sørensen (2014). *Vækst i nationens tjeneste. Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. København: Matematiklærerforeningen.
-  — (2016). *Herons formel. Hvordan en alexsandriner fik sat mål på alle slags trekantede*. København: Matematiklærerforeningen.
-  — red. (2018). *Snows spøgelseskort, Halleys livsrenter og Cauchys integraler. Tre gode matematikhistorier*. Matematiklærerforeningen. Under udgivelse.
-  Dolin, J., L. B. Jacobsen, S. B. Jensen og B. F. Johannsen (dec. 2016). *Evaluering af naturvidenskabelig almendannelse i stx- og hf- uddannelserne*. MONA Forskningsrapportserie for matematik- og naturfagsdidaktik 3.
-  Johansen, M. W. og H. K. Sørensen (2018). "Modelvalg og ansvar". *Aktuel Naturvidenskab*, nr. 1, s. 36–39.
-  Sørensen, H. K. (mar. 2017). *Tal*. Tænkepauser: Viden til hverdagen 47. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag.
-  Sørensen, H. K. og M. W. Johansen. "Matematisk dannelse for det 21. århundrede". *Tidsskriftet MATEMATIK*. Accepteret.