# Fortløbende summer

# NMCC

**2018**

**Danmark**

**Muldbjergskolen**

**8.P**

# Indholdsfortegnelse:

# Vores første observationer

Vi har i projektet taget udgangspunkt i formlen for differensrækkers sum. Definitionen på en differensrække er en række af tal, med den samme difference mellem hvert tal. I vores tilfælde var differencen mellem tallene 1. F.eks. 4+5+6=15. Vi har ikke regnet 0 med, heller ikke negative tal til at starte med. Vi har dog i nogle tilfælde vist hvordan det ville se ud hvis vi havde 0 med og vi har et enkelt eksempel med negative tal. I hele forløbet startede vi hver time ud med at samles i klassen og gøre status på hvad vi havde fundet ud af.

For at starte på fordybelsesopgaven fandt vi først ud af, hvad summen blev, når man lagde 2 fortløbende tal sammen. Her er et eksempel på en del af rækken:

(0+1=1)

1+2=3

2+3=5

3+4=7

Alle summerne af 2 fortløbende tal blev ulige. Det vil summen af 2 fortløbende tal altid være. Grunden til at summen altid vil være ulige er, at det ene af 2 fortløbende tal altid er ulige, og summen af et ulige og et lige tal altid vil være et ulige tal. Derfor ved vi nu, at alle de ulige tal kan skrives som fortløbende summer. Det gælder dog kun hvis man tager tallet 0 med, ellers vil man ikke kunne skrive 1 som en fortløbende sum.

Derefter satte vi os i grupper eller alene og arbejdede videre med fordybelsesopgaven. Til at starte med skrev vi forskellige talrækker, for at se om der var en sammenhæng mellem summerne.

# Ulige antal af fortløbende tal

Vores observationer viser at hvis der er et ulige antal af fortløbende tal, er summen med i den tilsvarende tabel. Det vil sige at hvis der er 3 fortløbende tal, så er summen med i 3-tabellen. Summen af 5 fortløbende tal er med i 5-tabellen, og summen af 7 fortløbende tal er med i 7-tabellen. Sådan vil det fortsætte med summerne af ulige antal fortløbende tal.

Jo lavere det ulige antal af fortløbende tal er, jo flere tal fra den tilsvarende tabel er med. Her kan man se en lille del af de første ulige tabeller. De gule felter viser det laveste tal der kan skrives, som fortløbende tal fra den tilsvarende tabel. Eks. 28 er den mindste sum der kan skrives af 7 fortløbende tal, hvis man ikke tager 0 med.

| l1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 10 | 7 | 18 | 22 | 26 |
| 3 | 9 | 15 | 21 | 27 | 33 | 39 |
| 4 | 12 | 20 | 28 | 36 | 44 | 52 |
| 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
| 6 | 18 | 30 | 42 | 54 | 66 | 78 |
| 7 | 21 | 35 | 49 | 63 | 77 | 91 |
| 8 | 24 | 40 | 56 | 72 | 88 | 104 |
| 9 | 27 | 45 | 63 | 81 | 99 | 117 |
| 10 | 30 | 50 | 70 | 90 | 110 | 130 |

Her kan man se de første dele af rækkerne, med ulige antal af fortløbende tal:

| 3 fortløbende tal | 5 fortløbende tal | 7 fortløbende tal | 9 fortløbende tal |
|---|---|---|---|
| (0+1+2=3)<br>1+2+3=6<br>2+3+4=9<br>3+4+5=12<br>4+5+6=15<br>5+6+7=18 | (0+1+2+3+4=10)<br>1+2+3+4+5=15<br>2+3+4+5+6=20<br>3+4+5+6+7=25<br>4+5+6+7+8=30<br>5+6+7+8+9=35 | (0+1+2+3+4+5+6=21)<br>1+2+3+4+5+6+7=28<br>2+3+4+5+6+7+8=35<br>3+4+5+6+7+8+9=42<br>4+5+6+7+8+9+10=49<br>5+6+7+8+9+10+11=56 | (0+1+2+3+4+5+6+7+8=36)<br>1+2+3+4+5+6+7+8+9=45<br>2+3+4+5+6+7+8+9+10=54<br>3+4+5+6+7+8+9+10+11=63<br>4+5+6+7+8+9+10+11+12=72<br>5+6+7+8+9+10+11+12+13=81 |

Derefter skrev vi en formel for summen af de fortløbende tal med 3 i rækken.

Formlen ser således ud:

Vi kalder det første af de 3 fortløbende tal a.

a+(a+1)+(a+2)=sum

Eks. :

1+(1+1)+(1+2)=6

Man kan også omskrive formlen til 3a+3

Grunden til at alle summerne af 3 fortløbende tal følger 3-tabellen, er at de alle kan divideres med 3, når tallet er ganget med 3, og der er lagt 3 til tallet.

Det samme gælder med 5 fortløbende tal. I en række med 5 fortløbende tal vil formlen for summen se sådan ud:

a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)

Den kan omskrives til 5a+10

Grunden til at summen af 5 fortløbende tal er med i 5-tabellen, er at alle tal der bliver ganget med 5 også kan divideres med 5, og at 5 går op i 10.

Igen kan man gøre det samme med f.eks. 13 fortløbende tal, i dette tilfælde vil formlen hedde 13a+78. Det vil sige at alle summerne af 13 fortløbende tal er med i 13-tabellen, fordi alle tal ganget med 13 også kan divideres med 13, og fordi 78 er med i 13-tabellen og kan også divideres med 13.

Ud fra vores observationer kan vi konkludere at summen af et ulige antal fortløbende tal altid er med i den tilsvarende tabel.

## Lige antal af fortløbende tal

Vores første observationer ved lige antal af fortløbende tal viste, at hvis man dividerer den fortløbende sum med antallet af fortløbende tal, vil man altid få halvdelen af antallet af fortløbende tal i rest. Det vil sige at antallet af rest er 1 større end ved den forrige række af lige antal fortløbende summer. Eks. den første fortløbende sum af 6 fortløbende tal er 21, 21 divideret med 6 giver 3 i rest. Den første fortløbende sum af 8 fortløbende tal er 36, 36 divideret med 8 giver 4 i rest.

| 2 fortløbende tal | 4 fortløbende tal | 6 fortløbende tal | 8 fortløbende tal |
|---|---|---|---|
| (0+1=1) | (0+1+2+3=6) | (0+1+2+3+4+5=15) | (0+1+2+3+4+5+6+7=28) |
| 1+2=3 | 1+2+3+4=10 | 1+2+3+4+5+6=21 | 1+2+3+4+5+6+7+8=36 |
| 2+3=5 | 2+3+4+5=14 | 2+3+4+5+6+7=27 | 2+3+4+5+6+7+8+9=44 |
| 3+4=7 | 3+4+5+6=18 | 3+4+5+6+7+8=33 | 3+4+5+6+7+8+9+10=52 |
| 4+5=9 | 4+5+6+7=22 | 4+5+6+7+8+9=39 | 4+5+6+7+8+9+10+11=60 |
| 5+6=11 | 5+6+7+8=26 | 5+6+7+8+9+10=45 | 5+6+7+8+9+10+11+12=68 |

Formlen for summen af 4 fortløbende tal er $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)$, som kan omskrives til $4a+6$. Grunden til, at der er 2 i rest ved division med 4 er, at et tal ganget med 4 også kan divideres med 4, og at 6 er 2 større end 4, så der vil være 2 tilbage.

Det vil sige, at alle tallene i 4-tabellen, lagt 2 til kan skrives som fortløbende sum af 4 fortløbende tal. Det første tal dette gælder for er 8, hvis man ikke tager 0 med. F.eks. 8+2=10, som kan skrives som sum af 4 fortløbende tal, 1+2+3+4=10.

Det samme gælder for alle summerne af lige fortløbende tal. Man kan f.eks. tage tallet 6. Formlen for summen af 6 fortløbende tal er $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)$, formlen kan omskrives til $6a+15$.

Antallet af rest ved division med summen, og antallet af de fortløbende tal er det samme som halvdelen af antallet af fortløbende tal. Dermed er resten også 1 større end ved den forrige række af fortløbende summer, som er dannet af lige antal fortløbende tal.
Resten er 3, ved summen af 6 fortløbende tal divideret med 6.

Resten er 4, ved summen af 8 fortløbende tal divideret med 8. Resten er ½ x ved summen af x antal fortløbende tal divideret med x, når x er lige.

Tabelværdi

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 2 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 3 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |
| 4 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 |
| 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| 6 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 |
| 7 | 14 | 28 | 42 | 56 | 70 | 84 |
| 8 | 16 | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 |
| 9 | 18 | 36 | 54 | 72 | 90 | 108 |
| 10 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |

Her kan man se et skema, der viser de første dele af de lige tabeller. De markerede felter viser det første tal i den tilsvarende tabel, der med halvdelen af tabellens værdi lagt til, kan skrives som fortløbende sum af de lige tabeller.

# Udvikling af formel

Vi arbejdede videre med formlen for differensrækkers sum og prøvede at lave en anden formel. Vi kalder antallet af tal i rækken x. Starttallet kalder vi a.
Differensrækkers sum=x:2*(a+a+x-1).
Det første tal i en differensrække lagt til det sidste tal i rækken, ganget med halvdelen af antallet af tal i rækken er lig med summen. Vi har omskrevet formlen, så den hedder x:2*(2a+x-1). Den formel har vi senere arbejdet ud fra, da vi undersøgte tallene, som er primtal og potenser af 2.

To elever fra klassen begyndte at udvikle en måde at udregne summen af en række fortløbende tal. Det gjorde de ved hjælp af et regneark, hvor de først kunne finde summen af en række fortløbende tal, ved at indtaste antal fortløbende tal, starttallet og tallet der skulle lægges oveni, som vi kalder y, f.eks. 4a+6, her er y, 6. Måden man finder y er ved at omskrive denne formel: a+(a+1)+(a+2)+(a+3). Sådan en formel kan man skrive til summerne af alle antal af fortløbende tal. Antallet a'er er det samme som antallet af fortløbende tal, til det første a skal der ikke lægges noget til, men alle de andre skal der lægges en mere til end ved det forrige a.

Det udviklede de videre på og kom frem til en måde at finde en fortløbende sum, ved at kende starttallet og antallet af fortløbende tal. Det gjorde de ved at gå ud fra formlen for differensrækkers sum.

Da vi arbejdede med lige antal af fortløbende tal, fandt vi ud af, at man kunne skrive en formel for hvordan man finder y, når antallet af fortløbende tal er 4.
Antal af fortløbende tal: x
Rest: r
y=x*(r:2)+r
Problemet med denne formel er at den kun gælder for 4 fortløbende tal. Så vi prøvede at lave den om, for at få den til at gælde for alle lige antal af fortløbende tal.
Den formel blev sådan her: y=x*(r-1)+r
Denne formel virker for alle lige antal fortløbende tal, men den virker ikke for ulige antal af fortløbende tal. Grunden til at denne formel ikke virker for ulige antal af fortløbende tal er, at der ikke vil være nogen rest ved division med summen og antallet af fortløbende tal.

| **Antal af fortløbende tal** | **Formel for sum** | **Rest ved division med antal af fortløbende tal** |
|---|---|---|
| 2 fortløbende tal | 2a+1 | 1 |
| 4 fortløbende tal | 4a+6 | 2 |
| 6 fortløbende tal | 6a+15 | 3 |
| 8 fortløbende tal | 8a+28 | 4 |
| 10 fortløbende tal | 10a+45 | 5 |

For at lave en formel, der både gælder for lige og ulige antal af fortløbende tal, var vi nødt til at finde ud af hvilket tal, der kan stå i stedet for resten. Vi fandt ud af, at hvis man kalder et tilfældigt lige antal af fortløbende tal x, vil resten svare til x:2. Den formel hedder (x:2-1)*x+(x:2). Vores tanke var at formlen skulle være en anden måde at skrive x*(r-1)+r, hvor man ikke skulle være afhængig af at udregne en rest.

y=tallet der skal lægges til.

Klik her for at prøve formlerne.

| X | *(x:2-1) | +(x:2) |
|---|---|---|
| Antallet af fortløbende tal er x. | Det tal x skal ganges med for at få det højeste tal i den tilsvarende tabel, som er lavere end y. | x:2 er det tal der skal lægges til, for at komme op på værdien af y. |

4 fortløbende tal= 2 i rest. 4 går op i 6 1 gang, 2 i rest.

6 fortløbende tal= 3 i rest. 6 går op i 15 2 gange, 3 i rest.

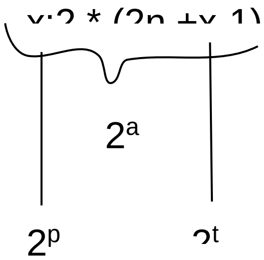
8 fortløbende tal= 4 i rest. 8 går op i 28 3 gange, 4 i rest.

| Antal af fortløbende tal, x | x divideret med 2, trukket 1 fra | Plus x:2 | Resultat, y |
|---|---|---|---|
| 4 | *(4:2-1) | +(4:2) | =6 |
| 6 | *(6:2-1) | +(6:2) | =15 |
| 8 | *(8:2-1) | +(8:2) | =28 |

De to elever, der havde lavet regneark tidligere prøvede at indsætte den nye formel, og fandt ud af at den også kan bruges til at udregne summen af et ulige antal af fortløbende tal.

# Potens med 2 som rod ($2^n$) kan ikke skrives som fortløbende sum.

En elev fra klassen kom med en teori om, at $2^n$ aldrig vil komme som summen af fortløbende tal. Vi begyndte at bygge videre på den teori, og brugte formlen ½x*(2n+x-1) til at finde ud af om elevens teori var sand.




Et potenstal med 2 kan deles op og skrives som et produkt af 2 tal f.eks.
$2^5=2^3*2^2$

For at et produkt skal kunne skrives som en potens med 2 som rod. Så skal begge faktorer kunne skrives, som en potens med 2 som rod.

Hvis x er lige bliver (2n+x-1) ulige og kan ikke skrives, som en potens med 2 som rod.
Hvis x er ulige bliver ½ x også ulige, og kan heller ikke skrives, som en potens med 2 som rod.

Hermed er det bevist, at $2^n$ aldrig kan skrives, som en fortløbende sum.

# Primtal

Vores observationer viser at primtal kun kan skrives, som fortløbende sum på én måde, hvis man ikke regner negative tal med. Primtal kan kun skrives som fortløbende sum af 2 tal. Vi brugte igen vores formel for differensrækkers sum, x:2*(2a+x-1).

Hvis et produkt skal være et primtal, skal den ene faktor være 1 og den anden et primtal. Hvis den første faktor skal være et primtal, skal x være det dobbelte af et primtal, f.eks er 26 det dobbelte af 13. Så skal den anden faktor være 1. Det kan den kun blive ved at bruge negative tal.
Med tal sat ind vil formlen se sådan ud:
26:2*(2*-12+26-1)=13
13*1=13

Hvis x er lige:

| x:2 | *(2a+x-1) |
|---|---|
| Dette vil blive lige, fordi et lige tal divideret med 2 er lige. | Dette vil blive ulige, fordi 1 trukket fra et lige tal giver et ulige tal. |

Dermed vil summen blive et lige tal når x er lige. Primtal er alle ulige tal på nær 2 som er det eneste lige primtal.

Hvis x er ulige:

| x:2 | *(2a+x-1) |
|---|---|
| Dette vil blive et decimaltal (,5) | Dette vil blive et lige tal når x er ulige. |

Hvis x er ulige vil summen følge den tilsvarende tabel. De eneste steder man kan se et primtal i en tabel, er som det første tal i *"sin egen"* tabel. Derfor kan primtal ikke skrives på denne måde, fordi alle tal der er med i en tabel også kan divideres med tabeltallet og blive et helt tal.

Man kan kun skrive primtal på en måde. Det er når x=2, fordi så vil tallet i parentesen give et ulige tal, som vil blive ganget med 1. På den måde vil man kunne skrive alle ulige tal, heriblandt også primtallene, som fortløbende summer af 2 tal.

# Tal, der kan skrives på flere måder

Alle produkter af x antal ulige tal, kan skrives som fortløbende summer, på x antal måder.

Her er et eksempel:

3*5=15

Derved kan 15 både skrives, som fortløbende sum af 3 tal og 5 tal.

4+5+6=15

1+2+3+4+5=15

Det gælder for alle produkter af ulige tal ganget med hinanden. Jo flere tal der er ganget med hinanden, jo flere måder kan produktet af de ulige tal skrives som fortløbende sum.

# Konklusion

I denne opgave har vi blandt andet taget udgangspunkt i formlen for differensrækkers sum og selv udviklet formler undervejs. Formlen vi selv har udviklet hedder: (x:2-1)*x+(x:2)=y. Hvor x=antal af fortløbende tal, y=tallet der skal lægges til. Tallet, som y skal lægges til er x*a, hvor a=starttallet. Den formel passer både på ulige og lige antal fortløbende tal. Vi har indsat den i et regneark og har derved kunnet beregne en fortløbende sum, ved kun at kende til starttallet og antallet af fortløbende tal.

Ud fra alle vores observationer kan vi konkludere at alle potenstal med 2, som rod ikke kan skrives som fortløbende sum på nogen måde. Primtal kan kun skrives som fortløbende sum på en måde, med mindre man bruger negative tal. Alle ulige tal på nær 1 kan skrives som fortløbende summer. Tal, der er produkter af x antal ulige tal ganget med hinanden, kan skrives som fortløbende summer på x antal måder. Vi kan også konkludere, at summer af ulige antal af fortløbende tal er med i den tilsvarende tabel.

I takt med at vi kom videre med opgaven og kom frem til flere resultater, kunne vi arbejde videre ud fra dem. I starten af hver time samledes vi alle i klassen og gennemgik vores resultater, som vi var kommet frem til siden sidst.

Vi har besvaret de to indledende spørgsmål, 'kan alle tal skrives som fortløbende tal?' og 'hvilke tal kan skrives på flere måder?'. Vi har også stillet os selv flere spørgsmål, 'er der et system mellem summerne?' og 'kan man opstille en formel, der gælder for alle fortløbende summer?'.

Reglerne for omkredsen af NMCC polygoner er de samme, som for de fortløbende summer. Fordi omkredsen af NMCC polygoner består af fortløbende tal er de samme regler, som gælder. F.eks. at alle summerne af ulige antal af fortløbende tal følger den tilsvarende tabel.

Vi har i dette projekt inddraget næsten alle de matematiske kompetencer fra formelsamlingen.

Problembehandling: Vi har selv opstillet spørgsmål og løsninger til forskellige problemer i dette projekt. Vi har også prøvet os frem, og er flere gange kommet frem til et resultat, som vi kan bruge.
Anvendelse og vurdering af matematiske modeller: Vi har lavet forskellige matematiske modeller, og brugt dem som måde at vise hvordan vi kom frem til vores resultater.
Ræsonnement og tankegang: Vi har argumenteret for og bevist, at vores observationer vedrørende fortløbende tal passer.
Repræsentation og symbolbehandling: Vi har beskrevet forskellige matematiske situationer med beskrivende sætninger, tabeller og regneudtryk.
Kommunikation: Vi har i denne rapport forklaret skriftligt, hvordan vi er kommet frem til forskellige resultater.
Hjælpemidler: Vi har som hjælpemiddel især benyttet regneark til test af formler, som vi har opstillet.

Vi har ikke før prøvet at lave en projektlignende opgave i matematik. Derfor havde vi svært ved at formulere vores observationer til en sammenhængende tekst. Det var faktisk et af vores største problemer i arbejdet med denne opgave. Derved har vi også lært at formulere vores observationer på matematisk sprog. Vi har også lært at bygge en projektopgave op.

Vi synes at denne opgave har været spændende og lærerig. Til at starte syntes flere af os, at opgaven virkede overskuelig nok, men som vi er kommet videre med opgaven, er den blevet mere uoverskuelig. Til sidst da vi fik samlet alle vores observationer og afsluttet det, faldt det hele på plads.