

Algoritis

Instrumental
matematik



FMK - Opvækst og læring

Med fokus på

Standardalgoritmer

Lidt om mig selv

1977 Lærereksamen og ansættelse på Nordagerskolen

2001 Matematikvejlederuddannelse Odense Seminarium

2001 Samarbejde med Malling Beck (Alinea) – IT til matematik

2008 Matematik i børnehøjde – viden om udvikling af matematiske referencerammer i daginstitutionerne

2012 PD som matematikvejleder UCL

2014 LabMat – undersøger sammenhæng mellem matematikvanskeligheder og brug af standardalgoritmer

2014 LabMat - MathMatters – brobygning mellem gymnasie og grundskolen

2017 Skolekonsulent FMK – Matematik i øjenhøjde for 0-20 årige

$$\begin{array}{r} 10+ \\ 100 \\ \hline 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{6}{\cancel{7}}\overset{10}{6} \\ + 87 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ + 87 \\ \hline \underline{\underline{28}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ \times 12 \\ \hline 140 \\ + 70 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 712 \\ 245 \\ \hline 533 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{6}{\cancel{7}}\overset{10}{6} \\ + 87 \\ \hline 29 \end{array}$$

$25 \cdot 16$

$= \underline{2630}$

~~$$\begin{array}{r} 25 \cdot 16 \\ 100 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ \hline 2630 \end{array}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 4444 \\ 100 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ + 13 \\ 41 \end{array}$$

Eleven kan ikke regne – eller ?

$$\begin{array}{r} 76 \\ + 87 \\ \hline 28 \\ \hline \hline \end{array}$$

Prøv sammen med din sidemand at overveje, hvordan eleven er nået til det resultat.

Eleven kan godt regne, men
algoritmen står i vejen

$$\begin{array}{r} + 76 \\ 87 \\ \hline \underline{\underline{28}} \end{array}$$

VII VI

$$7 + 6 = 13$$

IIX VII

$$8 + 7 = 15$$

XXIIX

$$13 + 15 = 28$$

1.

$$\begin{array}{r}
 6 \cancel{6}^{10} \\
 + 87 \\
 \hline
 29
 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r}
 29 \\
 + 13 \\
 \hline
 41
 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r}
 10 + \\
 100 \\
 \hline
 200
 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r}
 70 \\
 \times 12 \\
 \hline
 140 \\
 + 70 \\
 \hline
 210
 \end{array}$$

Overvej sammen med sidemanden, hvad eleven kan have tænkt i de fire opgaver

1.

EA

$$\begin{array}{r} \overset{6}{\cancel{7}} \overset{10}{6} \\ + \\ \underline{87} \\ 29 \end{array}$$

$$16 - 7 = 9$$

$$8 - 6 = 2$$

Man skal jo altid trække det mindste tal fra det største, eller hvad?

Og så var det forresten addition.
Signalerer lodret opstilling subtraktion?

Eleven skelner mellem de to positioner

2.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

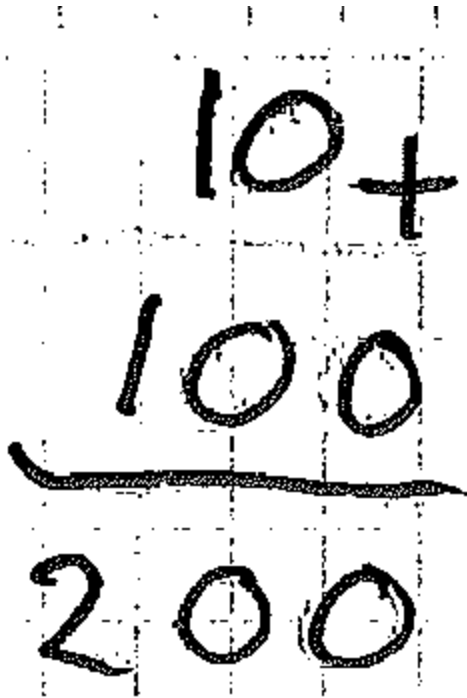
$$9 + 3 = 12$$

Der byttes om på cifrene

$$2 + 1 + 1 = 4$$

Hvordan forholder eleven sig til positionsværdierne?

3.



A handwritten addition problem is shown on a grid. The numbers are written in a cursive style. The first row contains '10' followed by a plus sign '+'. The second row contains '100'. A horizontal line is drawn under the '100'. The third row contains the sum '200'.

Tallene justeres mod
venstre og
Lægges sammen

Kan eleven forholde sig til
positions værdierne?

3.

$$\begin{array}{r} 100 + \\ \hline 100 \\ \hline 200 \end{array}$$

$$100 + 1 = 101$$

$$100 + 2 = 102$$

$$100 + 10 = 200$$

3.

$$100 + 1 = 101$$

$$100 + 2 = 102$$

$$100 + 3 = 103$$

$$100 + 4 = 104$$

$$100 + 5 = 105$$

$$100 + 6 = 106$$

$$100 + 7 = 107$$

$$100 + 8 = 108$$

$$100 + 9 = 109$$

$$100 + 10 = 110$$

Ved at skulle lægge tal fra 1 til 10 til 100 mundtligt og i hurtig rækkefølge nåede eleven frem til forståelsen og gav udtryk for en aha-oplevelse

Det var algoritmen, der ødelagde talforståelsen

4.

$$\begin{array}{r} 70 \\ \times 12 \\ \hline 140 \\ + 70 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$70 \cdot 2 = 140$$

$$70 \cdot 1 = 70$$

$$140 + 70 = 210$$

Igen stiller en
algoritme sig i vejen

Hvad er der lige sket her?

13
26
42
55

$$13 \overline{) 606}$$

42

55 ↓
26

Brug et par minutter på at drøfte det med sidemanden

Det var base 7 og ikke base 10

13
26
42
55

$$\begin{array}{r} 42 \\ 13 \overline{) 606} \\ \underline{55} \\ 26 \end{array}$$

Men det illustrerer problematikken med at overtage andres algoritmer

Regnestrategier i base 7

10 venner

$$1 + 6 = 10$$

$$2 + 5 = 10$$

$$3 + 4 = 10$$

$$4 + 3 = 10$$

$$5 + 2 = 10$$

$$6 + 1 = 10$$

10 mere

$$11 + 6 = 20$$

$$12 + 5 = 20$$

$$13 + 4 = 20$$

$$14 + 3 = 20$$

$$15 + 2 = 20$$

$$16 + 1 = 20$$

1 mere

$$11 + 6 = 20$$

$$12 + 6 = 21$$

$$13 + 6 = 22$$

$$14 + 6 = 23$$

$$15 + 6 = 24$$

$$16 + 6 = 25$$

Regnestrategier i base 16

$$1+F = 10$$

$$2+E = 10$$

$$3+D = 10$$

$$4+C = 10$$

$$5+B = 10$$

$$6+A = 10$$

$$7+9 = 10$$

$$8+8 = 10$$

$$9+7 = 10$$

$$10+6 = 10$$

$$11+5 = 10$$

$$12+4 = 10$$

$$13+3 = 10$$

$$14+2 = 10$$

$$15+1 = 10$$

Prøv at sætte flere tal ind i tabellen

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2															
3	3															
4	4															
5	5															
6	6															
7	7															
8	8															
9	9															
A	A															
B	B															
C	C															
D	D															
E	E															
F	F															
10	10															

Er det ikke bare eleverne, det er galt med?

Hvad får du hvis du trækker 1759 fra 2495 ?

1344

$$\begin{array}{r} 2495 \\ - 1759 \\ \hline 1344 \end{array}$$

Når en elev i sin tidlige matematikundervisning har lært, at man kun kan trække et mindre tal fra et større

Hvad får du hvis du trækker 1759 fra 2495 ?

1344

$$\begin{array}{r} 2495 \\ - 1759 \\ \hline 1344 \end{array}$$

men i løbet ca. 10 minutters samtale kan udlede de almene regler for potensregning, er det næppe elevens matematiske forudsætninger, det er galt med.

$$144 / 12 = 12$$

$$10 \cdot 12 = ~~120~~ 120$$

$$2 \cdot 12 = 24$$

$$120 + 24 = \underline{144}$$

$$169 / 13$$

$$A^n \cdot A^p = A^{n+p}$$

$$A^n / A^p = A^{n-p}$$

$$A^n / A^n = A^0 = 1$$

$$2^2 / 2^2 = 2^0 = 1$$

$$4 / 4 = 1$$

$$100 \cdot 100 = 10.000$$

$$10^2 \cdot 10^2 = 100^2 / 10^4$$

$$10^2 \cdot 10^3 = 100.000 = 10^5$$

$$10^5 \cdot 10^3 = 10^8$$

$$10^3 \cdot 10^4 = 10^7$$

$$10^5 \cdot 10^5 = 10^{10}$$

$$10^n \cdot 10^p = 10^{n+p}$$

$$10^3 / 10^2 = 10^1$$

$$10^n / 10^p = 10^{n-p}$$

$$10^{-1} =$$

$$10^2 / 10^3 = 10^{-1}$$

$$100 / 1000 = 0,1$$

Klare Mål 2001

- *”Den enkelte elev skal have mulighed for at udvikle egne metoder til antalsbestemmelse ved addition og subtraktion. Hovedregning, lommeregner og skriftlige notater indgår i et samspil i arbejdet med tallene.”*

Forenklede Fælles Mål 2014

- *”Eleven kan udvikle metoder til beregninger med naturlige tal”*
- *”Eleven kan udvikle metoder til addition og subtraktion med naturlige tal”*
- *”Eleven kan udvikle metoder til multiplikation og division med naturlige tal”*

2014 LabMat (Laboratorium for Matematikundervisning)

49% af eleverne i grundskolernes overbygning er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

28% af eleverne i 1. G er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

		Symbol				Sprog				Kontekst					Algoritmeproblemer				
		add	sub	div	mul	add	sub	div	mul	div	sub	mul	Point	Genn.	afadd	afsub	afmul	afdiv	I alt
Antal	136	131	126	81	93	136	101	51	101	84	111	102	1117	8,213	0%	18%	23%	26%	49%
Resultat															98%	83%	73%	53%	75%

Antal	101	95	98	79	80	101	81	62	75	69	86	81	901	8,921	0%	10%	14%	12%	28%
Resultat															97%	87%	78%	69%	81%

2015 35% af eleverne i 1. G er i algoritmerelaterede matematikvanskeligheder

Antal	106	98	103	88	84	104	86	69	83	86	94	87	982	9,2642	1	17	17	16	37
Resultat		92%	97%	83%	79%	98%	81%	65%	78%	81%	89%	82%			1%	16%	16%	15%	35%

2016

44% af eleverne på HTX er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

59% af eleverne i EUD er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

81% af eleverne på to hold voksenlærlinge er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

		Symbol				Sprog				Kontekst			Point	Genn.	Algoritmeproblemer					
		add	sub	div	mul	add	sub	div	mul	div	sub	mul			afadd	afsub	afmul	afdiv	I alt	
Antal	141	133	137	106	108	140	113	65	103	101	122	115	1243	8,8	0	19	33	29	62	62
Resultat		94%	97%	75%	77%	99%	80%	46%	73%	72%	87%	82%			0%	13%	23%	21%	44%	44%

Antal	29	27	27	9	22	29	19	5	19	13	18	15	203	7	0	10	6	10	17	17
Resultat		93%	93%	31%	76%	100%	66%	17%	66%	45%	62%	52%			0%	34%	21%	34%	59%	59%

	Klasse	Symbol				Sprog				Kontekst			Brøker					Point	Genn.	Algoritmeproblemer					Forekon
		add	sub	div	mul	add	sub	div	mul	div	sub	mul	12	13	14	15	afadd			afsub	afmul	afdiv	I alt		
Navn		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	15								
Antal	27	26	25	12	15	27	18	8	15	15	17	21					293	11	1	11	14	18	22	22	
Resultat		96%	93%	44%	56%	100%	67%	30%	56%	56%	63%	78%							4%	41%	52%	67%	81%	81%	

Instrumental undervisning er ødelæggende for talforståelsen for et stort antal elever.

Manglende talforståelse forhindrer matematisk læring og skaber matematikvanskeligheder.

Matematikvanskeligheder er ødelæggende for troen på at kunne lære matematik.

Matematikvanskeligheder er invaliderende.

To grundlæggende forskellige former for matematik

Instrumental: Hvad og hvordan
udspringer af algoritmer og formler
er teoretisk
mangler overførselsværdi

Relationel: Hvad og hvorfor
udspringer af erfaringer i og med omverdenen
udvikler matematisk teori
matematikken bliver et redskab til forståelse

Relational Understanding and Instrumental Understanding

Richard Skemp

Department of Education, University of Warwick

1976

Instrumental matematik

Kontekstuelle

problemstillinger er ofte konstruerede og bruges til afprøvning af matematiske modeller

Focus på undervisning i/formidling af metoder hvor indholdet splittes op i meningsløse dele

Eleven er passiv modtager af færdige løsningsmetoder og gennemfører endeløs træning

Relationel matematik

Kontekstuelle

problemstillinger bruges til at skabe matematisk forståelse og udvikle matematisk teori

Focus på undersøgende og reflekterende arbejde med matematikken

Eleven er aktiv deltager i læringsprocessen og udvikler selv matematisk teori og forståelse

Opgaver til analyse af Algoritis

Opgave 1. $2342 + 1279 = \underline{\hspace{2cm}}$

Opgave 2. $4897 - 1685 = \underline{\hspace{2cm}}$

Opgave 3. $640 : 16 = \underline{\hspace{2cm}}$

Opgave 4. $25 \cdot 16 = \underline{\hspace{2cm}}$

Opgave 7. Hvad er 629 delt med 17 ? $\underline{\hspace{2cm}}$

Opgave 8. Hvad er 12 gange 19 ? $\underline{\hspace{2cm}}$

Opgave 9. Ole har fødselsdag og vil gerne dele ud. Ole har en pose med 228 flødekarameller med, og i hans klasse er der 19 elever i alt.

Hver elev får $\underline{\hspace{2cm}}$ karameller.

Opgave 10. Mette har 2550 kr. med sig på indkøb. Hun køber en mobiltelefon, der koster 1849 kr.

Mette har $\underline{\hspace{2cm}}$ kr. tilbage efter at have købt telefonen.

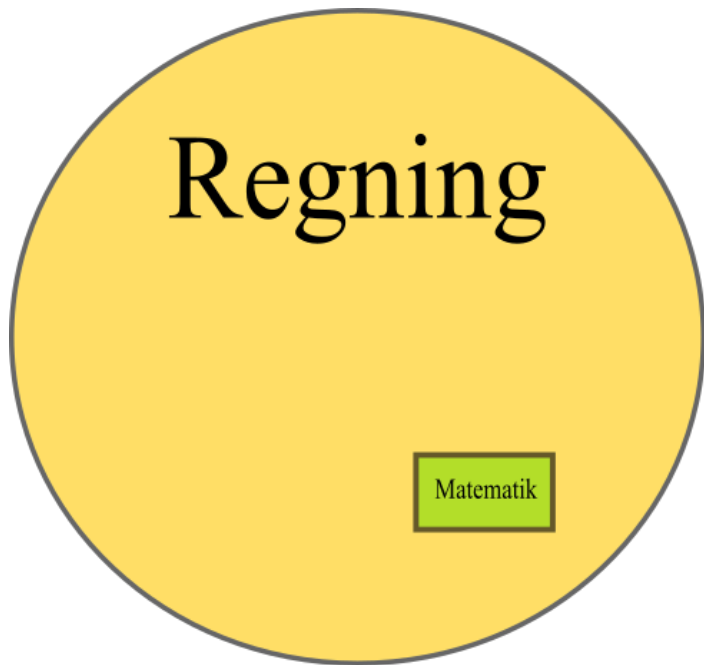
Løs opgaverne og indbyg algoritmefejl – opfind gerne nye fejltyper
Byt derefter med naboen og beskriv skiftevis hinandens fejl

Hvad
gør
vi
så
?



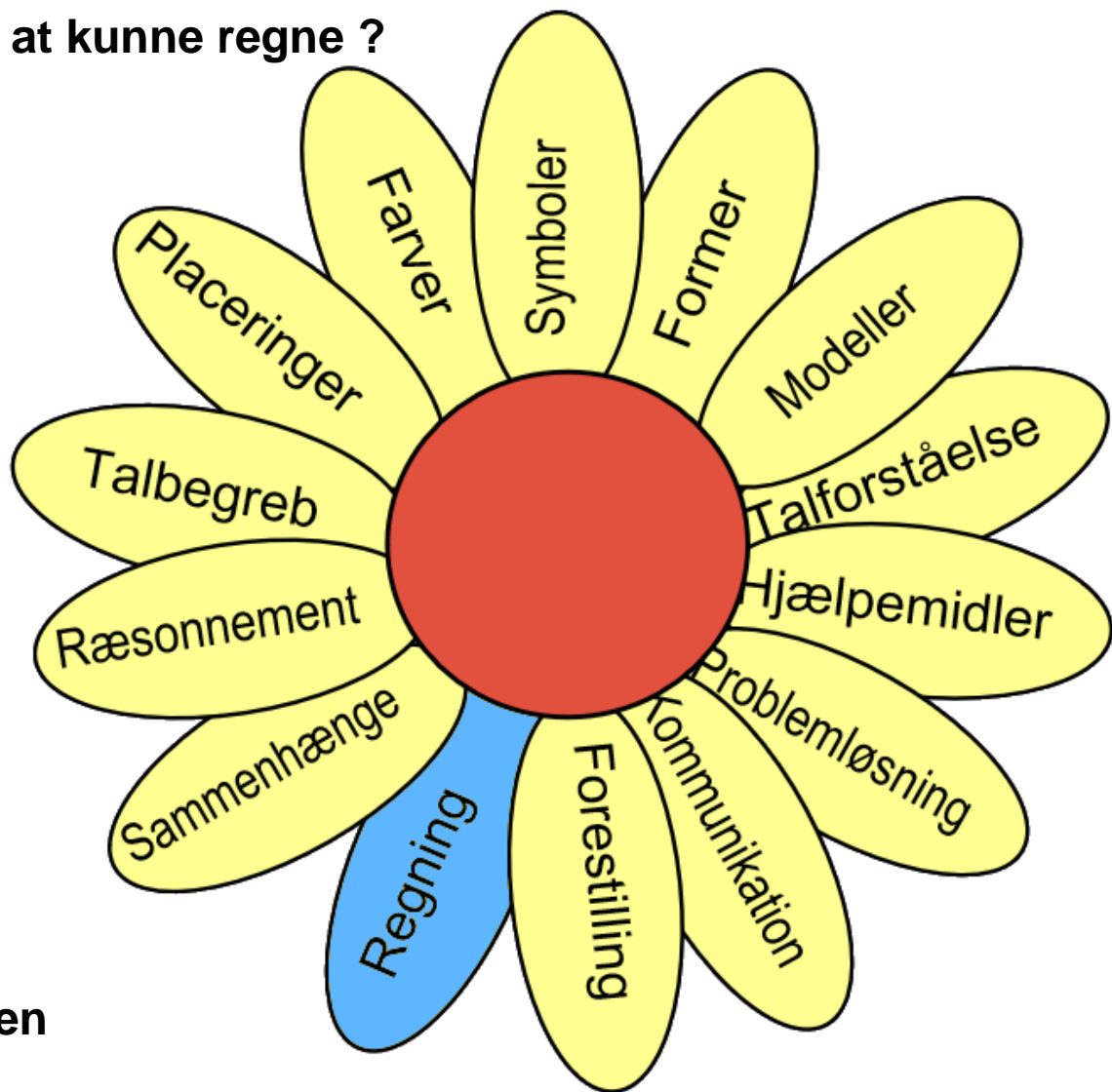
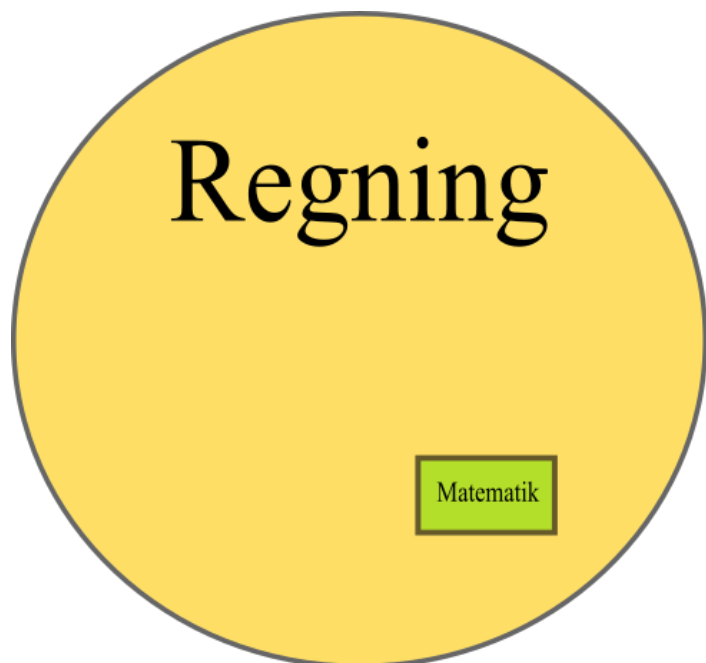
Kunne der ændres på balancen mellem regning og matematik?

Er matematikken en del af det at kunne regne ?



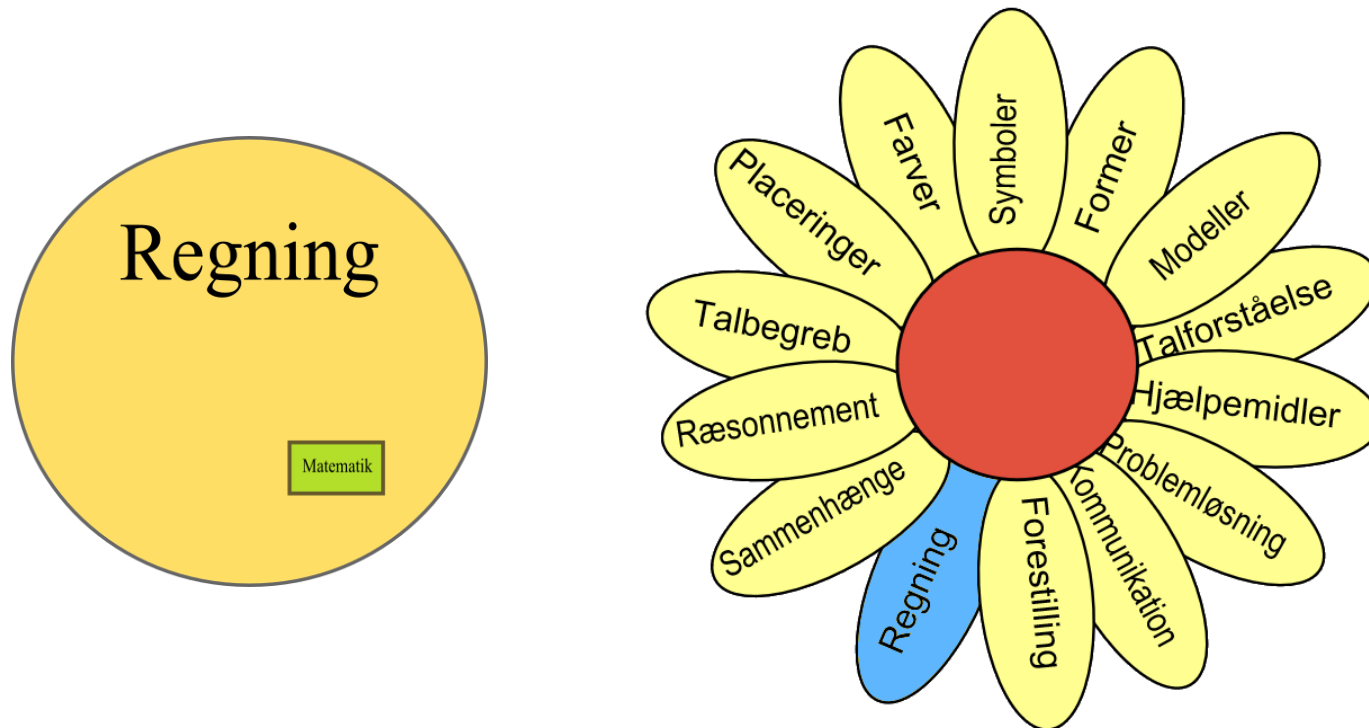
Kunne der ændres på balancen mellem regning og matematik?

Er matematikken en del af det at kunne regne ?



Eller er de fire regnearter en del af matematikken?

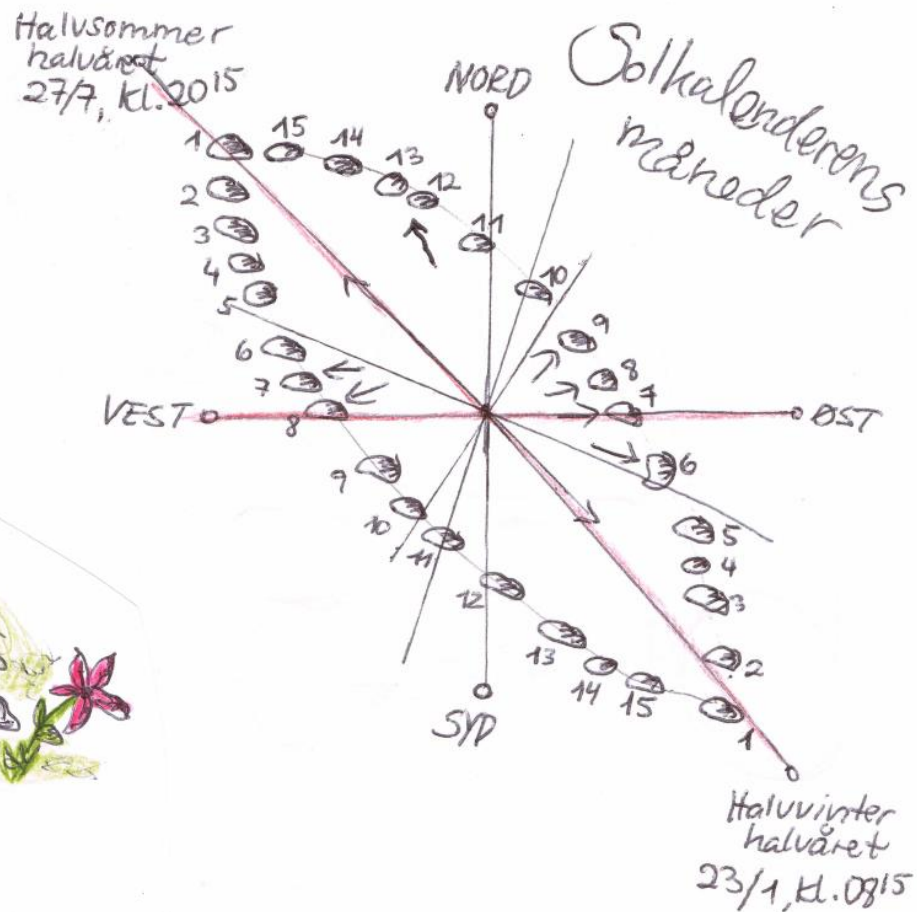
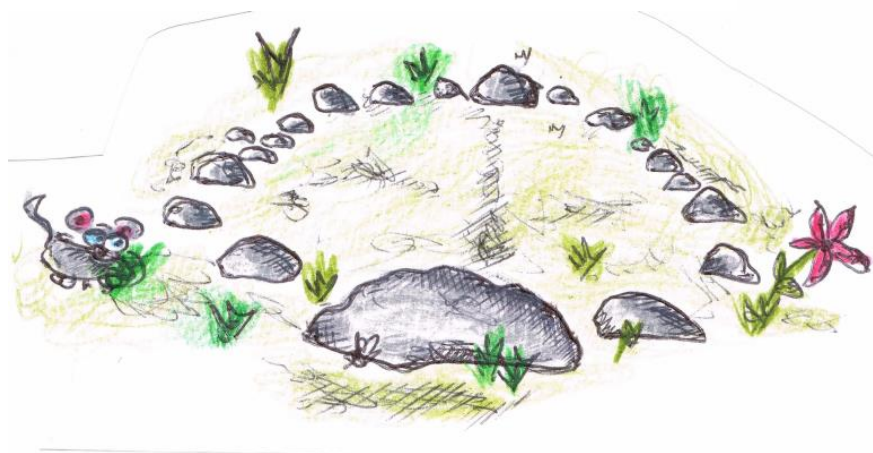
Ved at satse instrumentalt på de fire regnearter i indskolingen føres en stor del af eleverne i matematikvanskeligheder;



men når der blandt forældrene og i den summative testning er en forventning om, at alle mestrer de fire regnearter, er det svært at stå imod.

Hvordan har den historiske udvikling formet sig?

Og kan vi lære af den?



Solkalender og solur fra ca. 1.500 f.v.t.

Ulveknogle fra Mähren

ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



Ulveknogle fra Mähren

ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



Ishangknoglen ca. 10.000 f.v.t.

Tællestrategier og systematisering

Ulveknoglen fra Mähren

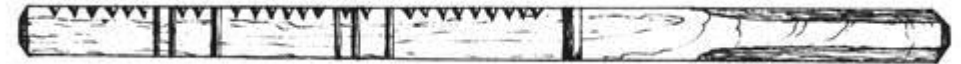
ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



Ishangoknoglen ca. 10.000 f.v.t.

Tællestrategier og systematisering



Karvestokken ca. 1900

Decimalsystemet

indføres i dansk valuta

i 1873

Ulveknogle fra Mähren

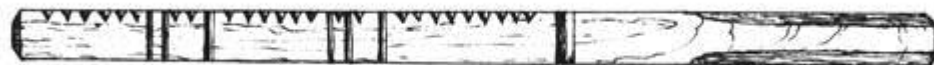
ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



Ishangoknoglen ca. 10.000 f.v.t.

Tællestrategier og systematisering



Karvestokken ca. 1900

Decimalsystemet

indføres i dansk valuta i 1873

Man kunne måske i højere grad tænke den udvikling ind i matematikundervisningen

||||| =

|||| | ||| | ||| | ||| | ||| | ||| | ||| | ||| | ||| =



|||| | ||| + ||| | ||| + ||| | ||| + ||| | ||| + ||| | ||| + ||| | ||| =



$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 8 = 58$$

Ti tyve tredive fyrre halvtreds = otte og halvtreds

Regnestrategier, hvordan ?



Regnestrategier – prøv selv

Matematikkort



Her er der link til alle kortene, og du kan få teksterne læst op. Klik på teksten for at få den læst op. Du kan klikke på QR-koden når du vil løse opgaverne

5. Additionsstrategier 1



En god måde at blive god til at regne på, er at bruge regnestrategier.

Læg tallene sammen og skriv svaret. Når din svartid bliver mindre, er det bliver bedre til at regne.

Læg først de tal sammen, der giver 10 og læg der sidste tal til.

55. Additionsstrategier 5



En god måde at blive god til at regne på, er at bruge regnestrategier.

Klik på tallet til venstre og tænk over, hvorfor det kan deles op som det gør.

Læg de tal sammen, der giver 10 og læg

sidste tal til.

75. Addition decimaltal 1



Her udvikler du regnestrategier når du skal lægge decimaltal sammen. Regnestrategierne er de samme som ved addition af hele tal, men nu er der blot et decimalpunkt at tage hensyn til.

76. Addition decimaltal 2



Her udvikler du regnestrategier når du skal lægge decimaltal sammen. Regnestrategierne er de samme som ved addition af hele tal, men nu er der blot et decimalpunkt at tage hensyn til. Tallene er lidt

større end ved det foregående.

Kortene uddeles kun til de elever, der har brug for det

Matematikvejledningssamtalen som metode

har en del tilfælles med kognitiv guidet instruktion

Metoden omhandler fem punkter:

Afdækning af elevens matematiske referencerammer og grundlæggende forståelse

Afdækning og tydeliggørelse af læringspotentialer

Afmærkning af læringsveje

Fjernelse af læringsforhindringer

Bibringelse af tro på at kunne lykkes med matematikken

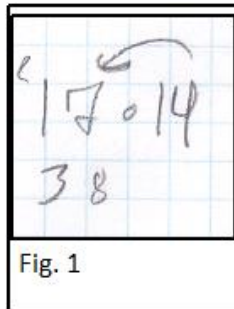
Afdækning af elevens matematiske referencerammer og grundlæggende forståelse

Hvordan er din oplevelse af matematikken?

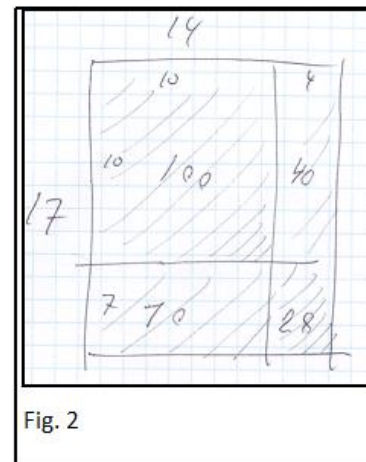
Er der noget du synes er svært?/let? - Hvorfor?

Kan du give et eksempel?

Kan du nævne nogle opgaver, du synes er svære?

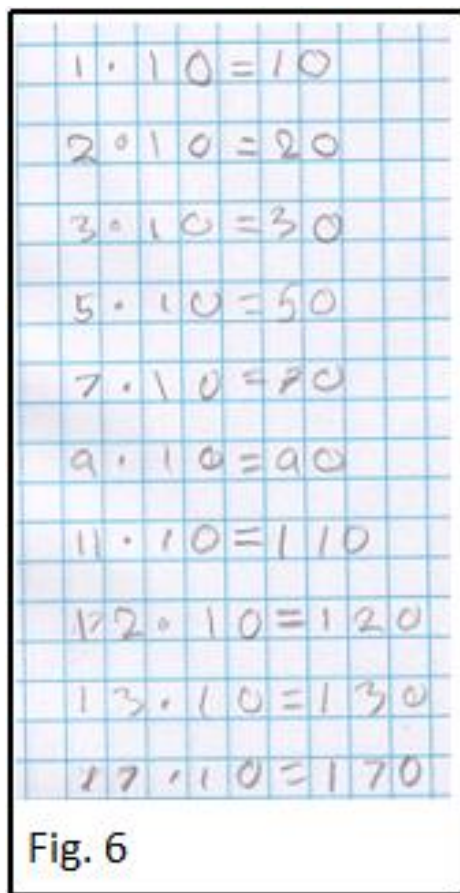


$$28+10=38$$



$$100+40+70+28=238$$

Afdækning og tydeliggørelse af læringspotentialer



$$17 \cdot 10 = ??$$

Instrumentalt: man ganger et tal med 10 ved at sætte et 0 bagefter tallet

Kognitiv guidning:

$$1 \cdot 10 =$$

$$2 \cdot 10 =$$

$$3 \cdot 10 =$$

$$7 \cdot 10 =$$

$$17 \cdot 10 =$$

Afmærkning af læringsveje

Elevens oplevelse af at matematikken udspringer af konkrete og af hverdagen



Den konkrete matematik, matematikken i omverdenen, og matematikken i hverdagen



Lægger grundlaget for senere at opleve at matematikken kan hjælpe til en bedre hverdag

Matematikens sprog, symboler, begreber og teori

Fjernelse af læringsforhindringer

Handwritten calculation on grid paper showing the division of 640 by 16. The top part shows $16 \overline{) 640}$ with a horizontal line above the 640. Below that, the division is written as $\frac{640}{16} = 40$.

Fig. 7

Handwritten calculation on grid paper showing the multiplication of 16 by 32. The numbers 16 and 32 are written vertically on the left. To the right, the multiplication is shown as $16 \times 32 = 512$ with intermediate steps: $16 \times 32 = 320$, $16 \times 32 = 640$, $16 \times 32 = 1280$, $16 \times 32 = 2560$, and $16 \times 32 = 5120$.

Fig. 8

Må man skrive kr. bagefter?

$$640:16=$$

Du har 640 1kr. I en pose og du skal dele dem mellem 16 kammerater, der sidder her rundt om bordet.

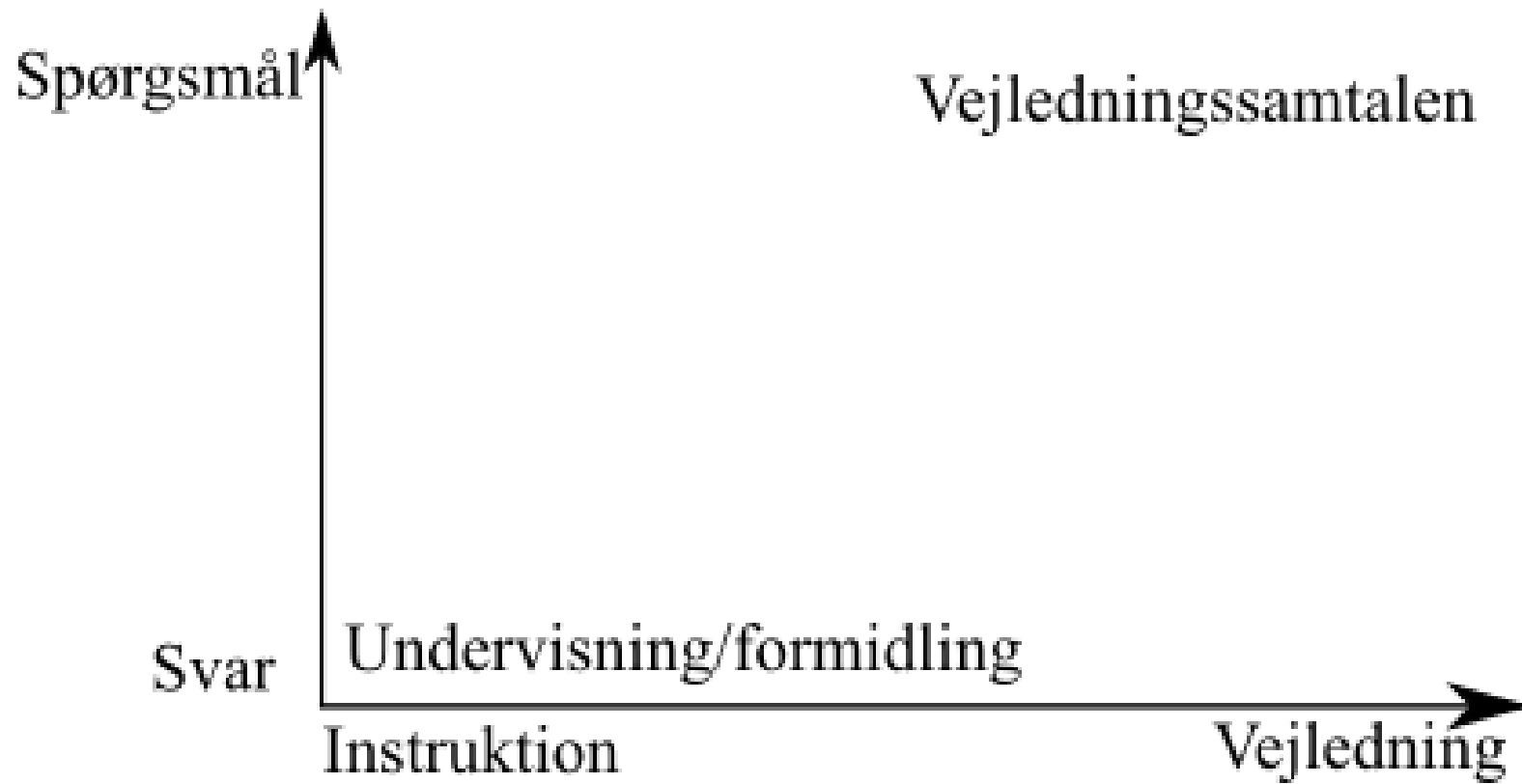
Bibringelse af tro på at kunne lykkes med matematikken

Omfatter en gennemgang af hvad der blev spurgt om og hvad der svarede.

Under samtalen tilkendes ikke, hvis et svar er forkert, der spørges med enklere tal eller på en anden måde.

Spørgsmålene har til formål at få eleven til at ræsonnere.

Til afslutning gennemgås elevens svar og tænkemåde og svarene bruges som bevis på elevens forståelse.



Elevbemærkninger 7. kl. 2019

Kan ik

Det er noget lort og jeg har det svært med at gange og divider og jeg kan ikke holde til at lave så meget ad gangen

Jeg synes det er svært men jeg vil så gerne lære det i 5kl blev jeg erklæret talblind. Jeg er meget afhængig af min lommeregner, på grund af min udfordring.

Der hvor jeg har det sværest ved det er når vi har om minus, decimaltal.

Pisser mig af fuckr af når man har en ide og man er i gang med at regne så glemmer man det.

Der er lidt for mange opgaver som er det samme

Altså matematik har aldrig rigtig været mig, eller jo fra 0 til 2. ellers har jeg aldrig brudt mig særlig om det.

Jeg har ret nemt ved det meste, men jeg kan ikke finde ud af at dividere med 10'ere

Fint nok

70% af eleverne i klassen lider af Algoritis

Materialer

Matematikvejledningssamtalen som metode

http://matematikmatador.dk/Soenderborg/Matematikvejledningssamtalen_som_metode.pdf

Matematikkort

<http://matematikmatador.dk/matematikkort.php>

Screeningsopgaver til algoritis

http://matematikmatador.dk/Soenderborg/opgaver_til_analyse_03032019.pdf