Ræsonnementskompetencen på mellemtrinnet

Problemløsning er hjertet i matematik men bevisførelse er matematikkens sjæl…. (oversat fra Schoenfeld, 2009)

SDU

LSUL Laboratory for Coherent Education and Learning

Dorte Moeskær Larsen

- Lærer fra Frederiksberg Seminarium
- Folkeskolelærer Hjortespringsskolen i Herlev
- Adjunkt/lektor Læreruddannelsen Zahle
- Lektor Læreruddannelsen Odense
- Ph.d. studerende ved SDU - LSUL (Laboratorium for sammenhængende undervisning og læring)

Min motivation…

<u>Udsagn fra læreruddannelsen</u>:

”Når der står ‘vis at’, skal man så bevise det eller…”

”…når nu man skal bevise den der definition…”

”…jeg kan bare bevise det i Geogebra – at det altid er sådan lige meget hvor meget jeg trækker i den…”

SDU

LSUL

Spørgeskema på læreruddannelsen ma (n=57)

Ræsonnementer og bevisers plads i grundskolen

- 18 vigtig for udvikling af matematisk forståelse
- 5 noget der skal læres udenad
- 7 unødvendig
- 14 en måde at forklare matematik på
- 13 ikke præcise

Bevis hvorfor summen af 2 ulige tal giver et lige

- 0 deduktivt bevis
- 12 nogenlunde ok svar (på vej)
- 42 ikke korrekt
  - Fx: 11 empiriske svar

Resten ikke tydeligt eller ikke svar

(Larsen, Østergaard & Skott, 2017)

Fordi:
5+5 = 10,
3+7 = 10
9 +11 = 10, et ulige tal er et lige tal +1.

Et ulige tal består af et lige tal og en enkelt. Så når man lægger 2 af dem sammen, lægger man 2 lige tal sammen og de 2 enkelte sammen får man 2 lige tal, som man så lægger sammen og det bliver derfor alle et lige tal…

En god veninde og en dårig veninde er dårligt, En dårlige veninde og en dårlig veninde er god, da de ikke er sammen med gode venner.

SDU

Ræsonnementskompetencen anses som vigtig i grundskolen:

Se fx. PISA, TIMSS, Fælles mål,
Kompetencerapporten,
NCTM Standards…

At lære *af* at ræsonnere og at lære *at* ræsonnere

- At vise at resultatet er rigtigt men også at hvorfor det er det!

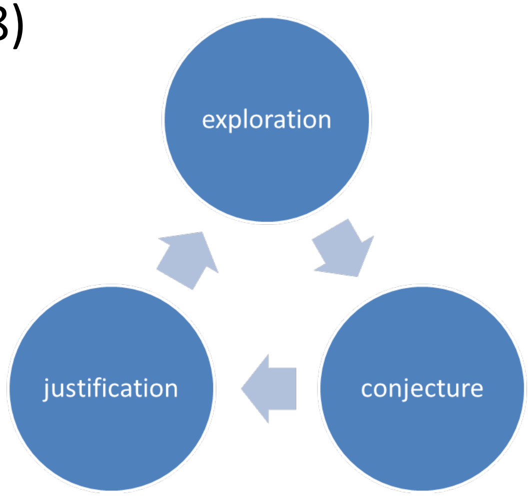
Ræsonnements-kompetencen handler om

at kunne opstille samt

at kunne følge matematiske ræsonnementer

At opstille ræsonnementer er en proces:

(NCTM, 2008)



Et ræsonnement kan anses som en kæde af argumenter

SDU LSUL

3.- 6. klasse:

Ræsonnement og tankegang (obligatorisk område)

Vis mere

Fase 1

Færdighedsmål
Eleven kan anvende ræsonnementer i undersøgende arbejde (vejledende mål)

Vidensmål
Eleven har viden om enkle ræsonnementer knyttet til undersøgende arbejde, herunder undersøgende arbejde med digitale værktøjer (vejledende mål)

Fase 2

Færdighedsmål
Eleven kan anvende ræsonnementer til at udvikle og efterprøve hypoteser (vejledende mål)

Vidensmål
Eleven har viden om enkle ræsonnementer knyttet til udvikling og efterprøvning af hypoteser (vejledende mål)

7. – 9. klasse:

Ræsonnement og tankegang (obligatorisk område)

Vis mere

Fase 1

Færdighedsmål
Eleven kan skelne mellem hypoteser, definitioner, og sætninger (vejledende mål)

Vidensmål
Eleven har viden om hypoteser, definitioner og sætninger (vejledende mål)

Fase 2

Færdighedsmål
Eleven kan skelne mellem enkelttilfælde og generaliseringer (vejledende mål)

Vidensmål
Eleven har viden om forskel på generaliserede matematiske resultater og resultater, der gælder i enkelttilfælde (vejledende mål)

Fase 3

Færdighedsmål
Eleven kan udvikle og vurdere matematiske ræsonnementer, herunder med inddragelse af digitale værktøjer (vejledende mål)

Vidensmål
Eleven har viden om enkle matematiske beviser (vejledende mål)

I litteraturen beskrives det at problemerne skyldes

1. Bøgerne mangler fokus
2. Ingen sammenhæng mellem hvad der undervises i grundskolen og gymnasierne (det føles som nyt for eleverne på gymnasiet)
3. Manglende lærerviden i grundskolen + holdninger

   Fx

   - Lærerne i grundskolen anser det som noget elever først skal lære i gymnasiet

   - Hvad er et lødigt argument

SDU

LSUL Laboratory for Coherent Education and Learning

Eksplicit kompetencedækning:

	FOR	P1	P1	P2	M1	M2	M3	RT1	RT2	RT3	RS1	RS2	RS3
Sigma 4	28	0											
Sigma 5	43	0											
Sigma 6	56	0											
samlet	127	0											
KonteXt 4	62	0				0,02							
KonteXt 5	80	2	0,03			0,09			0,03		,01	0,01	
KonteX 6	158	4	0,03		0,01	0,01	0,0	0,01	0,01			0,01	0,01
samlet	300	6	0,02			0,03			0,01			0,01	0,01
Faktor 4	20	0											
Faktor 5	70	0											
Faktor 6	28	0											
samlet	118	0											
Matematiktak 4	49	0											
Matematiktak 5	72	0											
Matematiktak 6	89	0								0,01			
samlet	210	0											
Format 4	38	1	0,03										
Format 5	36	0											
Format 6	41	0											
samlet	115	1	0,01										
Matematrix 4	53	1	0,02			0,04		0,06		0,06	,19	0,02	0,28
Matematrix 5	101	3	0,03	0,01	0,01	0,06		0,03	0,01		,03		0,06
Matematrix 6	59	0			0,08	0,12	0,0		0,03		,02	0,12	0,24
samlet	213	4	0,02		0,03	0,07		0,03	0,01	0,01	,07	0,04	0,16
Kolorit 4	52	0											
Kolorit 5	71	0											
Kolorit 6	53	0											
samlet	176	0											
Multi 4	57	7	0,12					0,05	0,07				
Multi 5	114	15	0,13						0,11	0,01			
Multi 6	101	6	0,06	0,01	0,01	0,01	0,0	0,07	0,07	0,01	,04		
samlet	272	28	0,10					0,04	0,08	0,01	,01		

Indenfor området: Måling

Læs mere i:
Gissel, S. T., Hjelmborg, M., Kristensen, B. T., & Larsen, D. M. (2019). Kompetencedækning i analoge matematiksystemer til mellemtrinnet. *MONA*. (på vej)

Implicit kompetencedækning:

	FOR	P1	P1	P2	M1	M2	M3	RT1	RT2	RT3	RS1	RS2	RS3
Sigma 4	28	0						0,07	0,14				0,11
Sigma 5	43	13	0,30			0,02		0,09	0,02		0,42		0,14
Sigma 6	56	18	0,32		0,07	0,02	0,04	0,18	0,11	0,04	0,04		0,48
samlet	127	31	0,24		0,03	0,02	0,02	0,13	0,09	0,02	0,16		0,28
KonteXt 4	62	21	0,34		0,00	0,08	0,02	0,05	0,21	0,05	0,21	0,15	
KonteXt 5	80	24	0,30		0,00	0,01	0,01	0,04	0,16	0,04	0,16	0,11	
KonteX 6	158	39	0,25		0,03	0,03	0,01	0,06	0,18	0,02	0,07	0,06	0,12
samlet	300	84	0,28		0,01	0,03	0,01	0,05	0,18	0,03	0,12	0,09	0,06
Faktor 4	20	9	0,45		0,10	0,10	0,05		0,15	0,05	0,05	0,05	
Faktor 5	70	15	0,21		0,16	0,10	0,01	0,03	0,06	0,01	0,03	0,01	0,13
Faktor 6	28	5	0,18		0,07				0,07		0,07		0,39
samlet	118	29	0,25		0,13	0,08	0,02	0,02	0,08	0,02	0,04	0,02	0,17
Matematiktak 4	49	0				0,08		0,04		0,04	0,02	0,02	0,18
Matematiktak 5	72	16	0,22			0,04					0,07	0,08	0,06
Matematiktak 6	89	17	0,19		0,01			0,03	0,04		0,03	0,08	0,22
samlet	210	33	0,16			0,03		0,02	0,02	0,01	0,04	0,07	0,16
Format 4	38	10	0,26					0,11	0,24		0,11	0,03	0,26
Format 5	36	8	0,22					0,06	0,11		0,17		0,28
Format 6	41	7	0,17					0,10	0,12		0,02	0,10	0,29
samlet	115	25	0,22					0,09	0,16		0,10	0,04	0,28
Matematrix 4	53	1	0,02						0,06	0,02			
Matematrix 5	101	20	0,20			0,02		0,04	0,08		0,08	0,01	0,21
Matematrix 6	59	8	0,14			0,05			0,24		0,12		0,14
samlet	213	29	0,14			0,02		0,02	0,12		0,07		0,14
Kolorit 4	52	16	0,31		0,12	0,17	0,04		0,10	0,06	0,02	0,25	
Kolorit 5	71	20	0,28		0,04	0,06	0,03	0,17	0,21	0,03	0,18	0,06	0,04
Kolorit 6	53	21	0,40		0,02	0,02	0,04	0,25	0,11	0,04	0,08		0,09
samlet	176	57	0,32		0,06	0,08	0,03	0,14	0,15	0,04	0,10	0,10	0,05
Multi 4	57	6	0,11			0,09			0,21	0,07	0,09	0,09	0,25
Multi 5	114	15	0,13		0,03	0,01		0,04	0,14	0,04	0,18	0,09	0,19
Multi 6	101	24	0,24		0,01	0,05	0,02	0,03	0,15	0,01	0,17	0,07	0,18
samlet	272	45	0,17		0,01	0,04	0,01	0,03	0,16	0,03	0,16	0,08	0,20

Eksempel: Hvad vejer kasserne - en aktivitet fra KiDM-projektet

Fire kasser er blevet vejet parvis til at veje henholdsvis 6,8,10,12,14 og 16 kg.

Hvad kan kasserne veje enkeltvis? Hvor mange løsninger er der?

(kasserne vejer et helt tal!)

Kvalitet i Dansk og Matematik: KiDM

SDU

LSUL Laboratory for Coherent Education and Learning

Begrundelser(justifications)
Hvordan validere vi et argument?
- Hvad har kvalitet?

I Harel and Sowder (1998) skelnes mellem 3 forskellige typer af (over-)bevisskemaer:

Det eksterne overbevisende skema

- det står i facitlisten
- læreren afgør det

Det empiriske skema

- Et lige tal + et lige tal = et lige tal fordi 2+2=4

Det analytiske skema

- Fx begrundelser ud fra matematiske begreber
  (Gennemsnittet er x derfor føles det varmere i….)

Lithner (2008) skelner mellem
(imitative & creative)

Imiterende ræsonnementer

- Udenadslære
- Algoritme

Kreative ræsonnementer

”*Model reasoning*” fra STX

DEFINITION - LIGE TAL

$$x \text{ er et lige tal} \Leftrightarrow \text{der findes et helt tal } n\text{, således at } x = 2 \cdot n$$

BEVIS FOR SÆTNINGEN

Antag, at x er lige. Ud fra ovenstående definition ved v
tal n, således at $x = 2 \cdot n$. Vi får da:

$$x = 2 \cdot n \quad \Rightarrow \quad x^2 = (2 \cdot n)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \cdot n^2$$

Da n er et helt tal, er $(2 \cdot n^2)$ også et helt tal. Hvis vi ser på den sidste ligning, ser vi, at x^2 kan skrives som 2 gange et helt tal. Ifølge definition 1 er x^2 derfor et lige tal, hvilket skulle bevises!

Q.E.D. (= Quod Erat Demonstrandum = Hvilket skulle bevises)

Det er muligt, med helt samme metode, at bevise følgende sætning:

SÆTNING - ULIGE MEDFØRER ULIGE

Lad $x \in N$. Da gælder:

$$x \text{ er et ulige tal} \Rightarrow x^2 \text{ er et ulige tal.}$$

SDU

LSUL Laboratory for Coherent Education and Learning

Tilbage til eksemplet…

Lærer: *Men da I prøvede det, prøvede I så automatisk de ulige tal?*

Hjalte: Ja

Lærer: *Hvorfor?*

Hjalte: *Det føles bare bedst*

Lærer: *Det føles bare bedst.. okay*. [læreren går videre]

Lærer: *Hvorfor var I optagede af tallet tolv?*

Caroline: *Det var bare fordi tolv, den havde vi bare haft med mange gange og den kunne vi lave både seksten og sådan noget ud af…*

Lærer: ok det er fint [lærere går videre]

Det diskuteres hvad det betyder at lægge lige og ulige tal sammen, da gruppen har fundet frem til at de to løsninger adskiller sig ved henholdsvis at indeholde lige tal eller ulige tal:

Lærer: *Vilfred?*

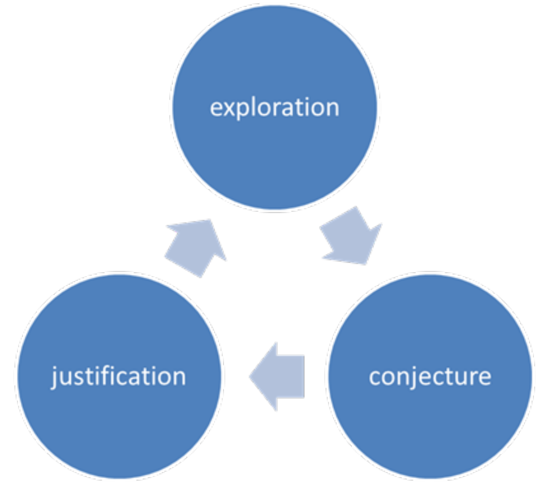
Vilfred: *Grunden til det er jo, at et ulige tal.. hvis man for eksempel har et lige tal, så vil det jo når man plusser en til, så bliver det et ulige tal. Så hvis man plusser 2 ulige tal, så er der jo ligesom 2 tilovers fra det lige tal og 2 er jo et lige tal så..*

Lærer: *Det er super godt forklaret, hvis vi for eksempel tager vores 3'er og vores 5'er herover, så er det begge lige tal, med en i overskud. Og hvis vi lægger de to sammen, så bliver de 2 overskydende til et lige tal.*

Vilfred: *Så har du faktisk 3 lige tal*

Lærer: *Det er så godt forklaret! Sindssygt godt! Er i med?*

Undersøge - formodning - begrunde



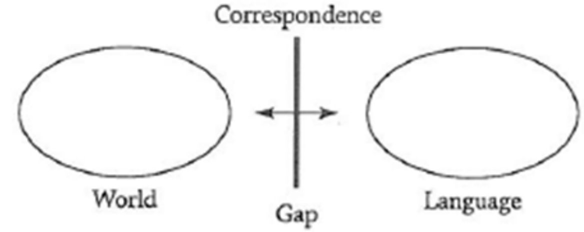
Ræsonnementer i den undersøgende undervisning…

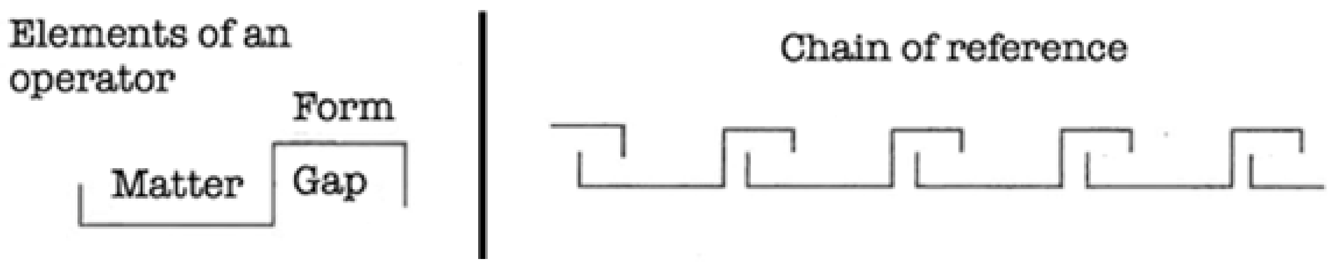
Men hvordan kommer vi fra ræsonnementer i hverdagskontekster til de mere formelle matematiske kontekster?

SDU LSUL

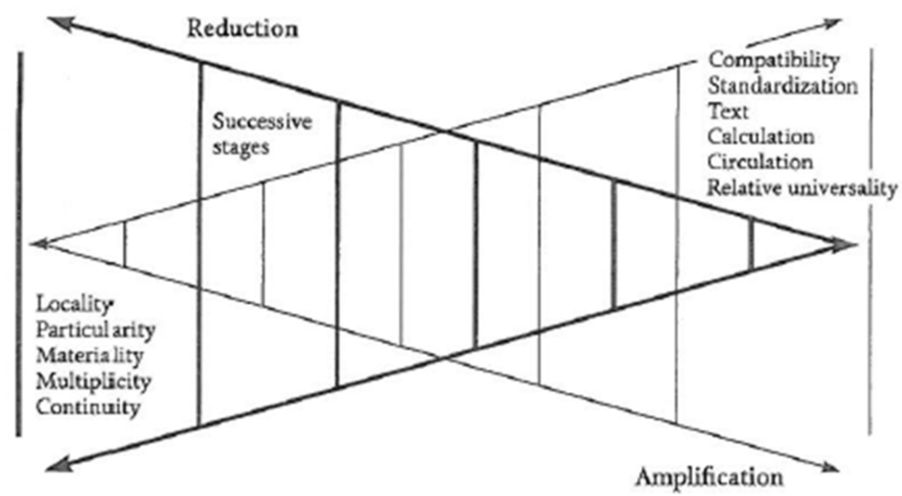
Analyse:
Udvikling af matematiske ræsonnementer i IBME-undervisning…

Bruno Latour:
Sammenhængen mellem hverdagens problemstillinger og en matematiske løsning…





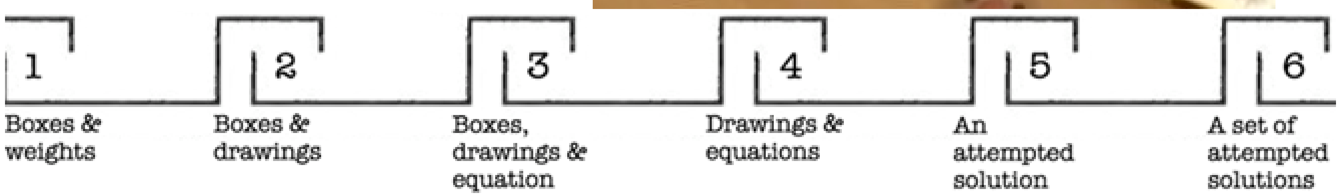
Bruno Latour:
At gå fra det konkrete til det formelle



Latour, B. (1999). Circulating reference — Sampling the soil in the Amazon forest. In *Pandora's hope essays on the reality of science studies* (pp. 24–79). Harvard University Press.

2. og 3. operator

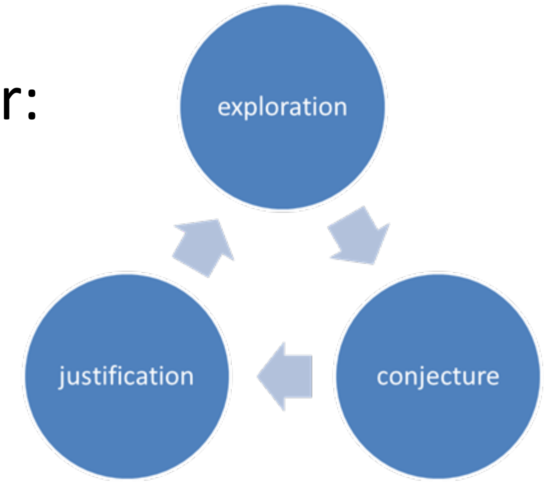
“Jeg har skrevet a,b,c og d her – ja jeg ved faktisk ikke helt hvorfor jeg har gjort det….”



SDU

LSUL
Laboratory for Coherent Education and Learning

<u>**Undersøge**</u> - formodning - begrundelse



Undersøgende tilgang på to forskellige måder:

- Ud fra et forløb fx med fokus på
  - Argumentation
  - Overbevisninger
  - Generiske beviser

- I undersøgende opgaver hvor fokus er på ræsonnementer
  - Undersøgelse af hvor mange burhøns kan der være på en kvadratmeter – herunder fokus på kvaliteten i begrundelserne/argumenterne
  - Undersøgelse af ”Alle de andre må” Argumentation ud fra et statistisk modelleringsforløb - hvordan overbevises andre/forældre/matematiklæreren…?

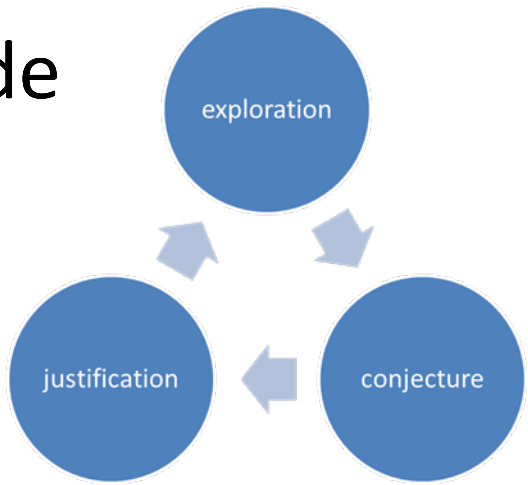
SDU

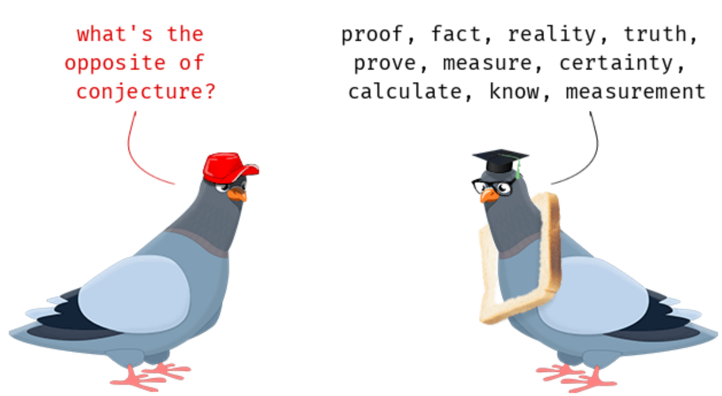
LSUL Laboratory for Coherent Education and Learning

Undersøge - **formodning** - begrundelse

At arbejde med formodninger/hypoteser i grundskolen

- Vigtig del af de senere begrundelser
- Gennemgå de forskellige kæder
- Lad eleverne selv undersøge, så de ikke springer led over i kæden



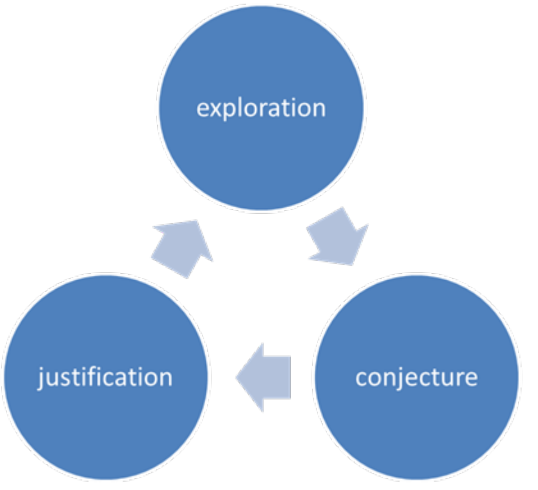


SDU

LSUL Laboratory for Coherent Education and Learning

Undersøge - formode - <u>begrundelse</u>

Hvorfor det?
Kan du forklare det?
Begrund lige det?
Er du sikker?
Holder det altid?



Kvaliteten af begrundelserne er vigtig
(jf. proof-schemes)
- hvad er lødige begrundelser i situationen?

SDU

LSUL Laboratory for Coherent Education and Learning

Ph.d. – hovedfokus på ræsonnementskompetencen…

Spørgsmålet er om vi kan måle om elevernes ræsonnementskompetence udvikles mere i den undersøgende undervisning?

→ Det vender jeg tilbage med☺

Spørgsmål?

Andre kommentarer eller bidrag til min ph.d. modtages gerne…

dmla@imada.sdu.dk eller dmla@ucl.dk

SDU

TAK

LSUL

Referencer

Schoenfeld, A. (2010). Series editor's foreword: The soul of mathematics Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective. D. A. Stylianou, M. L. Blanton and E. J. Knuth. New York /London, Routledge: xii-xvi.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III*, 234-283.

Larsen, D. M., Østergaard, C. H., & Skott, J. (2018). Prospective Teachers' Approach to Reasoning and Proof: Affective and Cognitive Issues. In *Students' and Teachers' Values, Attitudes, Feelings and Beliefs in Mathematics Classrooms* (pp. 53-63): Springer.

Latour, B. (1999). *Pandora's hope: essays on the reality of science studies*: Harvard university press.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics, 28*(1), 9-16.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*: Oxford University Press.

Wilson, M. (2009). Assessment from the ground up. *Phi Delta Kappan, 91*(1), 68-71.