Når matematikken bliver til trylleformularer

Metoderelaterede matematikvanskeligheder i grundskolen og i ungdomsuddannelserne

Indhold

Tegninger: Rebecca Osted

En forhistorie

I 2012 gennemførtes en undersøgelse af matematikvanskeligheder på 7. årgang på Nordagerskolen i Faaborg Midtfyn Kommune.

Undersøgelsen havde til formål at finde ud af, hvilken betydning opgavernes formulering havde for elevernes præstationer i forhold til opgaver indenfor de fire regnearter. Der var tre typer af formuleringer, en rent matematisk, en sproglig og en kontekstuel.

Undersøgelsen viste ingen signifikante forskelle på betydningen af formuleringerne, men derimod viste det sig, at en stor del af eleverne betjente sig af standardiserede regnemetoder og at størstedelen af samme årsag var endt i matematikvanskeligheder. Ud af 48 elever, var 27 i matematikvanskeligheder, der kunne tilskrives regnemetoden. Af de 48 elever var kun 14 sikre i brugen af en standardiserede regnemetoder og 6 elever havde udviklet en regnemetode selv.

Undersøgelsen fulgte et forsigtighedsprincip, hvor det kun var utvetydig forkert brug af regnemetoden, der taltes med som metoderelateret matematikvanskelighed. Besvarelser der manglede eller besvarelser med fejl, hvor der ikke indgik opstilling taltes således ikke med. Sandsynligheden for at omfanget af matematikvanskeligheder, der kunne tilskrives at eleven brugte standardiserede regnemetoder, var større var følgelig til stede. Efterfølgende er opgaverne, med få justeringer, blevet brugt i flere undersøgelser, i grundskolernes overbygning og i ungdomsuddannelserne og er fulgt op af interviews med en del af eleverne. Senest er der i efteråret 2016 gennemført en undersøgelse blandt elever på EUD uddannelserne på Svendborg Erhvervsskole. Alle implicerede elever er blevet interviewet, dels for at skabe større sikkerhed omkring den kvantitative undersøgelse, dels for at forsøge at komme bagom matematikvanskelighederne, dels for at finde veje til at kompensere for disse.

Den seneste undersøgelses formål omhandler således tre perspektiver:

At få beskrevet i hvilket omfang der gør sig matematikvanskeligheder, der kan henføres til undervisning i standardiserede regnemetoder indenfor de fire regnearter, gældende for elever i erhvervsuddannelserne.
At få beskrevet i hvilket omfang vanskeligheder med at benytte standardiserede regnemetoder indenfor de fire regnearter kan henføres til undervisningen subsidiært til elevens talforståelse.
At få beskrevet i hvilket omfang det er muligt at kompensere for matematikvanskeligheder, der kan henføres til undervisning i standardiserede regnemetoder indenfor de fire regnearter.

Interviewene gennemførtes som matematikvejledningssamtaler, hvorfor dette begreb vil blive brugt i det efterfølgende.

Nogle enkle regnefejl

100 + 10 = 200
76 + 87 = 29
76 + 87 = 28
712 – 245 = 533
70 · 12 = 210
80 + 24 = 05
25 · 16 = 2630

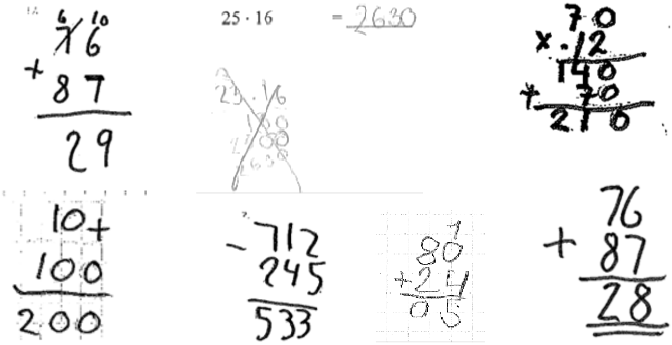
Ved at kigge på regnestykkerne her, er det ret enkelt at konkludere, at der er regnet forkert. Det er imidlertid ikke det, det skal dreje sig om, men de langt mere spændende spørgsmål om, hvorfor der er regnet forkert og hvordan.

Jeg vil derfor prøve at stille og besvare disse spørgsmål:

Hvordan er de elever, der har udført udregningerne nået til deres resultater?
Hvorfor er de pågældende elever ikke i stand til at udføre så enkle udregninger, som der her er tale om?

Det sidste spørgsmål kunne tænkes at skulle kædes sammen med elever-

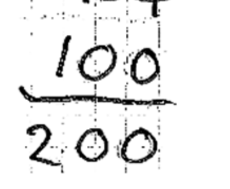
Indrømmet, det er ikke fair ikke at vise elevernes besvarelser, så de kommer her:



Det er altid spændende at skulle sætte sig ind i elevernes tankegang og matematiske forståelse, og fejl som disse kan være særdeles udfordrende. Spørgsmålet om det er underviseren[1)], der skal forstå elevernes måde at tænke og forstå matematik på, eller om det er eleverne, der skal forstå underviserens måde at tænke og forstå matematik på kunne med rimelighed stilles her.

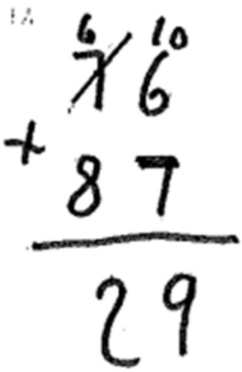
Når der arbejdes med elever i matematikvanskeligheder, høres gang på gang, at eleverne ikke forstod underviseren, og ofte hører der en fortælling med om, at den samme forklaring blev gentaget, hvis der blev spurgt endnu engang, og at eleven derefter gav op, for ikke at udstille sin manglende forståelse. Når dertil kommer, at en vigtig del af matematikundervisningen består i at hjælpe eleverne med at udvikle deres egne metoder indenfor for eksempel de fire regnearter, kan der næppe herske tvivl om, at det er underviseren, der skal have en grundig forståelse for elevernes matematiske tankegang og ikke omvendt.

Tilbage til opgaverne.



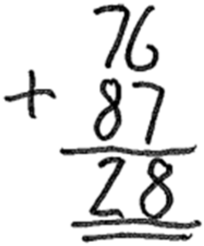
Forklaringen i denne opgave er, at eleven har fået fortalt, at en additionsopgave skal stilles op, så tallene står over hinanden og at det er vigtigt, at de er justeret ind efter hinanden. Eleven har her valgt en venstrejustering og når resultatet 200. Hvis ansvaret lægges på eleven, kan det forklares med, at eleven ikke har hørt efter, ikke har forstået, hvad underviseren sagde eller

måske bare er dårligt begavet. Det sidste var imidlertid ikke tilfældet. Eleven blev under en vejledningssamtale bedt om at løse opgaverne: 100 + 1, 100 + 2, 100 + 3 og 100 + 10. Der svaredes: 101, 102, 103 og 110, idet eleven kiggede på sin besvarelse og hentede det sidste svar fra den, overbevist om, at opstillingen var korrekt og at facit som følge deraf også måtte være korrekt.
Herefter blev eleven bedt om i hurtig rækkefælge at lægge tallene 1 til 10 til 100, idet opstillingen med den forkerte udregning blev lagt til side. Ved 100 + 10 svarede eleven 110 og udbrød i det velkendte ”Aha”, der signalerede, dels at elevens talforståelse var god nok, dels at årsagen til fejlopfattelsen var fundet.
Pointen er her, at eleven er blevet ført i matematikvanskeligheder ved en forfejlet undervisning i en standardiseret additionsmetode, og hermed synes både hvordan og hvorfor at være besvaret.

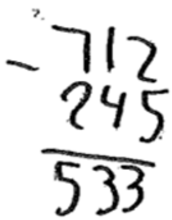


Forklaringen på denne opgave er, at også denne elev har fået forklaret, at additionsopgaver skal løses på en bestemt måde. Forklaringen er også, at det samme gælder subtraktion. Eleven ”låner” 10 fra tierne, trækker 7 fra 16 og får 9 for til sidst at trække mindste tier fra største. Eleven har sandsynligvis fået forklaret, at man ikke kan trække et større tal fra et mindre, som en del af forklaringen på, hvorfor man skal ”låne”.
Eleven har givetvis også en opfattelse af, at når to tal stilles over hinanden, er der tale om subtraktion. Også her er eleven ført i matematikvanskeligheder af en forkert undervisning i standardiserede metoder.
Taget i betragtning at opgaven her er løst i år 2016, 15 år efter der i fagmålene blev gjort op med den form for undervisning, kan det undre at den instrumentale tilgang til matematikken, og de problemer den skaber, stadigvæk spiller så stor en rolle. Det skal understreges, at diskussionen om metode- og udenadslære er betydeligt ældre.
Der henvises her til en artikel af Richard R. Skemp: *Relational Understanding and Instrumental Understanding* fra 1976, der på fornem vis tydeliggør de grundlæggende forskelle ved den metodebaserede undervisning og den forståelsesbaserede, og når vi selv tænker tilbage på egne

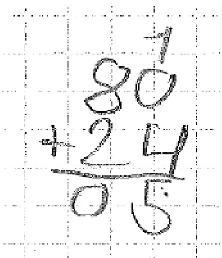
skoleår, dukker sammenligningerne af værdiforskellene mellem udenadslære og forståelse uundgåeligt op igen.



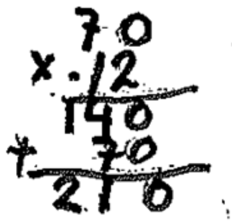
En stor del af forklaringen på denne opgave, svarer til forklaringen ovenfor, men eleven her, har forstået, at tallene skal lægges sammen, og det bliver de.
7 + 6 = 13; 8 + 7 = 15; 13 + 15 = 28 eller
VII + VI + VIII + VII = XXVIII
Eleven har delvist tænkt i et additivt talsystem delvist i et positionssystem.



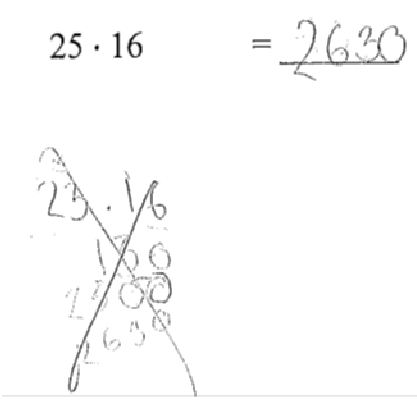
Denne opstilling er en klassiker. Eleven har fået forklaret, at man ikke kan trække et større tal fra et mindre, og trækker derfor konsekvent mindste fra største. Opgaven her og de to foregående stammer fra en test, hvor det i fuld alvor påstås, at eleverne skal kunne bruge den form for opstillinger. Testen er første gang udgivet i 2007, så det burde allerede på det tidspunkt have været åbenlyst, at et sådant krav ikke kan stilles.



Eleven her har lært at i additionsstykker skal tallene skrives over hinanden og man skal begynde fra en ende af. Hvis summen bliver over 10, skal der skrives et 1-tal over næste plads. Problemet er bare her, at eleven begynder fra venstre og ikke fra højre.
Det hører til historien, at eleven umiddelbart efter udbrød, at "det giver ingen mening", hvorefter opgaven blev skrevet op på samme måde igen, men herefter løst med det rigtige resultat. Denne elevs held er, at vedkommende forholdt sig kritisk til sin løsning.

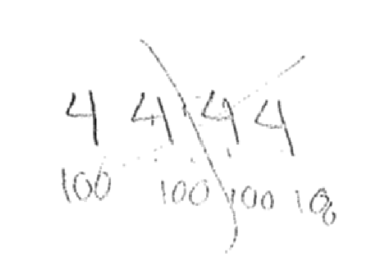


Eleven ganger først 70 med 2 derefter med 1 og forstår ikke, at det ikke er 1, men 10, der skal ganges med. Resultatet er, at 70 er ganget med 3. 70 · 3 = 210.
Eleven har fået vist en metode, men kan ikke bruge den, fordi eleven ikke forstår den. Det kunne være interessant, om den, der har vist eleven metoden selv har forstået den. Der er stor sandsynlighed for, at det ikke er tilfældet, for standardiserede metoder er ofte en mekanisk formidling af mekaniske færdigheder



Den sidste opgave er fra en test, der har til formål at medvirke til at skaffe data i forhold til metoderelaterede matematikvanskeligheder. Testen er brugt af elever i grundskolens overbygning og i ungdomsuddannelserne, blandt andet i forbindelse med LabMat projektet[2)], der kører på 3. år. Tolkningen af besvarelsen er usikker, men eleven har sandsynligvis først multipliceret 25 med 6, har skrevet 130 i stedet for 150, har derefter udregnet 25·10 til 250 og anbragt et ekstra 0 fordi, det skal man.

Illustrationen til højre viser en udregning den samme elev havde gjort, men ikke turde stole på, fordi den standardmetode hun havde lært gav et andet resultat. Eksemplet viser ret tydeligt, hvor stor magt standardiserede metoder har over de elever, der udsættes for dem.



Her kunne det være en ide, at vende tilbage til overskriften. For denne elev, for de andre elever og for mange, mange andre, er de standardiserede metoder, de i sagens natur ikke selv har udviklet, en trylleformular, og den er så stærk, at den overdøver talforståelsen. De 7 eksempler der er medbragt her, er kun en lille del af en omfattende samling, der entydigt viser det samme.

Den opfølgende matematikvejledningssamtale

En stor del af de elever, der har deltaget i undersøgelserne har også været til efterfølgende matematikvejledningssamtaler, hvor deres vanskeligheder i forhold til matematikken og de standardiserede metoder er søgt belyst og hvor der har været fokus på talforståelsen og en udvikling af forståelse for de 4 regnearter med udgangspunkt i elevens talforståelse. Samtalens formål har været, at be- eller afkræfte antagelserne om, at eleven er undervist i standardiserede metoder og i hvilket omfang metoderne har ført eleven i matematikvanskeligheder. Et formål har også været at finde læringsveje for eleven og endelig har det været vægtet højt, at give eleven en erkendelse af egne læringspotentialer. Det sidste er måske det vigtigste, for det har i stort set alle samtaler været tydeligt, at oplevelsen af ikke at kunne få de standardiserede regnemetoder til at fungere, har haft en stor indflydelse på elevernes selvopfattelse og på deres tro på at kunne lykkes med matematikken. Samtalen havde således 3 hovedformål:

At finde og italesætte læringshindringer.
At finde og italesætte læringsveje og -potentialer.
At påvirke elevens selvopfattelse og tro på at kunne lykkes med matematikken.

I afsnittet om elevernes matematikoplevelser søges det beskrevet, hvorvidt denne øvelse kan lykkes eller ej.

Elever i metoderelaterede matematikvanskeligheder

Hvor stor en procentdel af eleverne er i matematikvanskeligheder som en følge af, at de er undervist i standardiserede regnemetoder?

Tallene her er fra kvantitative undersøgelse, der er foretaget i grundskolernes overbygninger og på gymnasierne i Faaborg Midtfyn Kommune samt Svendborg Erhvervsskole :

2014

Grundskolerne:

0% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med addition.
18% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med subtraktion.
23% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med multiplikation.
26% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med division.
49% af eleverne viste i en eller flere opgaver vanskeligheder, der kunne tilskrives en eller flere af de nævnte områder.

Gymnasierne:

0% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med addition.
10% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med subtraktion.
14% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med multiplikation.
12% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med division.
28% af eleverne viste i en eller flere opgaver vanskeligheder, der kunne tilskrives en eller flere af de nævnte områder.

Foråret 2016

HTX:

0% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med addition.
13% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med subtraktion.
23% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med multiplikation.

21% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med division.
44% af eleverne viste i en eller flere opgaver vanskeligheder, der kunne tilskrives en eller flere af de nævnte områder.

EUD:

0% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med addition.
34% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med subtraktion.
21% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med multiplikation.
34% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med division.
59% af eleverne viste i en eller flere opgaver vanskeligheder, der kunne tilskrives en eller flere af de nævnte områder.

Efteråret 2016

EUD:

4% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med addition.
37% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med subtraktion.
33% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med multiplikation.
30% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med division.
63% af eleverne viste i en eller flere opgaver vanskeligheder, der kunne tilskrives en eller flere af de nævnte områder.

Efter korrektion baseret på samtalerne

4% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med addition.
41% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i for-

bindelse med subtraktion.
52% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med multiplikation.
67% af eleverne viste vanskeligheder, der kunne tilskrives metoder i forbindelse med division.
81% af eleverne viste i en eller flere opgaver vanskeligheder, der kunne tilskrives en eller flere af de nævnte områder.

Ved at anvende et forsigtighedsprincip konstateredes det, at 63% af eleverne var i metoderelaterede matematikvanskeligheder, men reelt var 81% af eleverne i den form for vanskeligheder.

Vælger de dygtigste elever gymnasiet?

De meget markante forskelle på repræsentationen af metoderelaterede matematikvanskeligheder i STX, HTX og EUD kunne lægge op til spørgsmålet.

Undersøgelsesmaterialet kan ikke give et brugbart svar. De elever der har været kaldt til samtale har primært været, bortset fra den seneste undersøgelse, de elever, hvis besvarelser viste metoderelaterede vanskeligheder. Materialet siger derfor intet om, hvorvidt de elever, der behersker de standardiserede metoder også forstår dem eller de blot har lært dem udenad. Der er imidlertid god grund til at antage, at metoderne er mekanisk læring uden egentlig forståelse jævnfør nedenstående citat.

Prospective teachers enter our courses with compressed knowledge of division. They are able to demonstrate procedural or algorithmic skill with division of multidigit numbers, but are limited in their conceptual understanding which was long ago compacted or perhaps never even known.

Unpacking Division to build Teachers Mathematical Knowledge, Melissa Hedges m.fl. 2004

Et svar kræver også en stillingtagen til, hvad det vil sige at være dygtig.

Er det dygtighed at kunne reproducere metoder? Gennem samtalerne fortælles det ofte, at eleven havde en dygtig lærer, men når der blev spurgt ind til forståelsen, blev den samme forklaring blot gentaget. Kan man med rette ikke stille spørgsmålstegn ved en dygtighed, der ikke formår at afvige fra det lærte og uddybe den bagvedliggende matematik? Vil en reproducerende læring understøtte og værdsætte reproduktionen fremfor originaliteten? Er det den dybeste årsag til de kriterier, hvorefter vi adskiller dygtighed, og det vi ikke vurderer som dygtighed.
Blandt de mange samtaler jeg har haft med elever i matematikvanskeligheder, har jeg tilbagevendende kunnet konstatere originalitet og kreativitet i tilgangen til matematikken, men jeg har desværre også kunnet konstatere en nedbrydende virkning i forhold til troen på at kunne lykkes, ikke kun med matematikken, men med skolen generelt og med uddannelse som en mulighed.
En af de seneste samtaler kunne således udvise en elev, der tidligt følte sig dømt til dumhed og hvor en bevilliget ekstrahjælp forsvandt til andre elever, der var bedre til at gøre opmærksom på deres behov for hjælp og støtte. Det interessante ved denne elev var, at han i mangel af faglig hjælp opfandt sine egne regnemetoder og ved samtalen var i stand til at demonstrere det.
Svaret er, at jeg ikke kan vide det med sikkerhed, men jeg tror det bestemt ikke, men min tro er baseret på indicier i mangel af evidens. Min viden på området er pragmatisk og baseret på samtaler med et andet fokus.

Testningen for metoderelaterede matematikvanskeligheder

Testen bestod af 11 opgaver delt op i 3 typer. De første 4 formuleret med matematiske symboler, de efterfølgende 4 i en sproglig formulering og de sidste 3 i en hverdagspræget kontekst. Oprindeligt skulle testen bruges til at analysere hvilke opgavetyper, med udgangspunkt i de nævnte formuleringstilgange, eleverne havde lettest/sværest ved at løse, men en sidegevinst viste sig at blive, at de var langt bedre til at beskrive metoderelaterede matematikvanskeligheder.
Der var god plads til udregninger og det blev præciseret overfor eleverne, at det var vigtigt, at deres udregninger var tydeliggjorte. Opgaverne ses her i en koncentreret version.

Skole:____________________
Navn:____________________Klasse:______ Dato:______

Obs: Det er meget vigtigt, at dine udregninger står på opgavearkene ud for den opgave, der besvares.

Opgave 1.	*2342 + 1279*	*= _______*
Opgave 2.	*4897 – 1685*	*= _______*
Opgave 3.	*640 : 16*	*= _______*
Opgave 4.	*25 · 16 = _______*	
Opgave 5.	*Hvad får du hvis du lægger 17 til 2000?_________*	
Opgave 6.	*Hvad får du hvis du trækker 1759 fra 2495? _______*	
Opgave 7.	*Hvad er 629 delt med 17?*	*_________*
Opgave 8.	*Hvad er 12 gange 19?*	*_________*
Opgave 9.	*Ole har fødselsdag og vil gerne dele ud. Ole har en pose med 228 flødekarameller med, og i hans klasse er de 19 elever i alt.* *Hver elev får ______ karameller.*	
Opgave 10.	*Mette har 2550 kr. med sig på indkøb. Hun køber en mobiltelefon, der koster 1849 kr.* *Mette har ___ kr. tilbage efter at have købt telefonen.*	
Opgave 11.	*Lars og hans klassekammerater har fået hver 8 flødekarameller.* *De er 19 elever i klassen.* *Der er delt ______ karameller ud i klassen.*	

Ved analysen blev hver enkelt opstilling analyseret, og kun i de tilfælde, hvor det var tydeligt, at der gjorde sig metoderelaterede problemer gældende, blev fejlen noteret som metoderelateret. Hvis en elev for eksempel havde noteret, at vedkommende ikke havde lært division, blev en fejl ikke noteret som metoderelateret. Ved de efterfølgende samtaler viste det i alle disse situationer, at der gjorde sig en metoderelateret fejl gældende, så de angivne tal for hvor en stor procentdel af eleverne, der er i metoderelaterede matematikvanskeligheder er virkeligheden større. Ved samtalerne på erhvervsuddannelserne viste forskellen sig at være markant, som anført i det foregående afsnit.
Der skelnedes mellem metoderelaterede fejl indenfor de fire regnearter.

Hvem lærer eller forsøger at lære eleverne standardiserede regnemetoder?

Menneskehedens succes som art tilskrives socialiseringsprocessen, hvor forældrene er barnets primære læringspartnere, og ikke uventet spiller forældrenes indsats en stor rolle. Gennem samtalerne og gennem samtaler med lærere, er det billede, der tegner sig, at forældrene eller større søskende spiller en stor rolle i videreformidlingen af standardiserede regnemetoder. Det forekommer endvidere, at forældrene lægger pres på lærerne for at "lære deres børn at regne". Endelig er der en generel fortælling fra samtalerne om, at læreren krævede, at der skulle bruges en bestemt opstilling. For elever der havde oplevet flere skiftende lærere, blev der tegnet et broget billede af skiftende metoder, hvilket ikke gjorde sagen bedre.
Gennem samtaler med forældre, der for eksempel har deltaget i matematikvejledningssamtaler sammen med deres børn, tegner der sig et tilsvarende billede.
Artiklen her handler ikke om at udpege ansvarlige, men om at belyse nogle problematikker omkring matematisk læring og undervisning og give anledning til didaktiske refleksioner. Der skelnes derfor mellem begrebet lærer og begrebet underviser. Læreren er den professionelle

underviser i grundskole og ungdomsuddannelse mens begrebet underviser omfatter alle læringspartnere. En elevs underviser kan således være en kammerat, der selv har lært en metode og videreformidler i en god mening, ligesom det kan være en instruktionsvideo på Internettet.

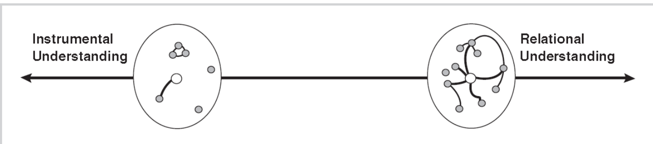
Når standardiserede metoder fylder så meget som de gør, er der mange forklaringer. Har man som underviser selv oplevet succes med en metode, er det nærliggende at ville videreformidle den. I forbindelse med videregivelsen af færdigheder og viden fra generation til generation, er det snublende nærliggende at sende ens egne tillærte metoder videre, for de virker antageligt fint for formidleren. I den lærendes perspektiv er det tilsvarende nærliggende at ønske at overtage metoder, der tilsyneladende virker upåklageligt.

Af samme grund er der ofte et elevønske om, at lære ”det der virker” uden alt for mange forstyrrende forklaringer. ”Kan du ikke bare fortælle mig, hvad jeg skal gøre” er en ret almindelig elevopfordring til læreren, og i det ligger der, sammen med lærerens ønske om at hjælpe eleven bedst muligt, en underforstået aftale, en didaktisk kontrakt. Denne type aftale kan måske bedst beskrives som en instrumental didaktisk kontrakt og står overfor en kompetencestyret didaktisk kontrakt, hvor det, som begrebet siger, handler om at bringe elevens matematiske kompetencer[3)] og forståelse ind i aftalegrundlaget.

Et andet forhold der synes indeholdt i den instrumentale didaktiske kontrakt er spørgsmålet om uddannelsens formål. Der synes at gøre sig to formål gældende. Det ene går ud på at eleven skal lære matematik, det andet at eleven skal have en uddannelse, og de to formål går ikke nødvendigvis hånd i hånd, underligt nok. For at opnå de høje karakterer, der er adgangsbillet til drømmestudiet, er det snublende nærliggende at efterspørge den lette genvej, der ligger i udenadslære af metoder frem for den mere besværlige og tidskrævende, der fører til brug- og holdbar matematisk forståelse. Her handler det altså om, hvordan matematisk læring måles og værdisættes, og her synes den lette, hurtige og prisvenlige opsummerende måling at være i langt højere kurs end den formative.

Den matematiske forståelse

Det ligger i ovenstående, at der gør sig to vidt forskellige opfattelser[4)], af hvad matematik er, gældende.
Den ene bygger på, at matematik er formler og metoder, der skal læres, stort set uanset omkostningerne. Denne instrumentale opfattelse er tydeligvis den gennemgående. Rigtig matematik er at kunne foretage så mange beregninger, så hurtigt som muligt. Jo mere avancerede og jo hurtigere, desto bedre matematiker er man, og i den sammenhæng glemmes det for det meste, at der findes glimrende redskaber, der er meget bedre end noget menneske nogensinde kan drømme at blive.
Den anden opfattelse, den der går ud på, at matematik og matematisk tænkning er udviklet på baggrund af erfaringer fra hverdagen og fra naturfaglige sammenhænge, virker til at være knap så alment anerkendt. Denne relationelle erfaringsbaserede opfattelse handler om at forstå og erkende, gennem eksperimenter og undersøgelser og er tæt forbundet med hverdagen og med naturvidenskaberne. I et historisk perspektiv er det på den måde matematisk viden og forståelse er udviklet, så man kunne med god ret spørge, hvorfor de opvoksende generationer ikke skal have lov til at møde matematikken på samme måde i stedet for at skulle terpe formler og metoder.



(Kilde: Van de Walle: Teaching Mathematics for understanding)

Figuren her viser forskellen på den læring de to tilgange til matematisk forståelse genererer. Den instrumentale tilgang skaber nye skemaer hos den lærende, men de er i det store og hele isolerede fra den lærendes øvrige skemaer og har dermed en begrænset værdi. (Skemp 1976).

Den relationelle forståelse frembringer nye samtidigt med at den bygger på eksisterende skemaer og har således en langt større anvendelighed og er af en blivende karakter.

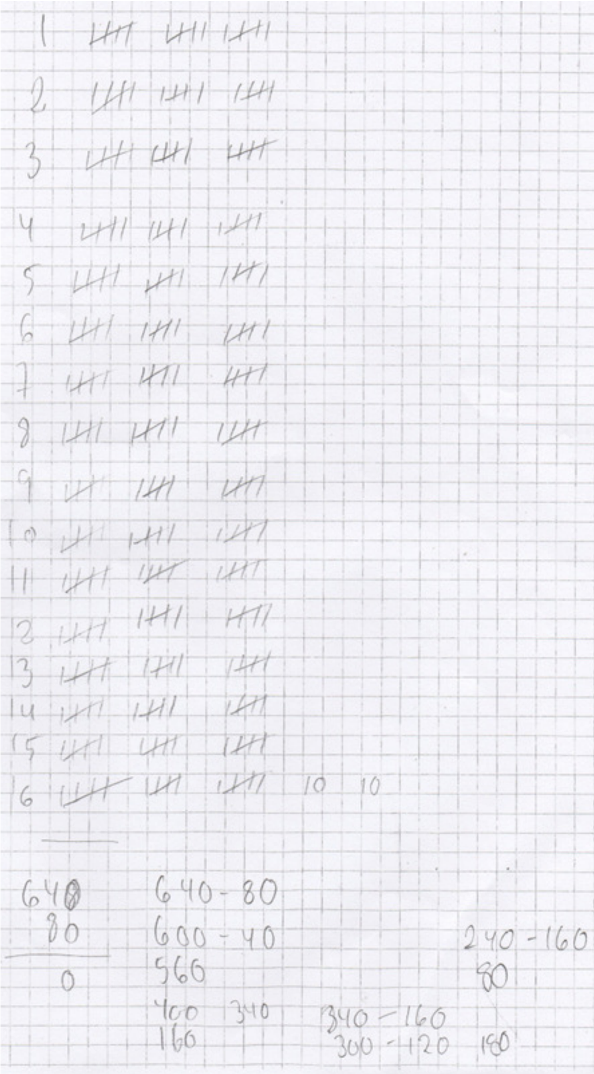
En lille ikke helt ubetydelig detalje er, at fagmålene for matematikken bygger på netop denne tænkning.

Overførselsværdi

Et andet heller ikke helt uvæsentligt aspekt, er matematikkens anvendelighed i andre fag. At matematikken spiller en stor rolle for alle fagområder kan ikke betvivles og af den grund er begrebet overførselsværdi centralt. Hvis matematikken er reduceret til mere eller mindre, for eleven, uforståelige trylleformler, kan det ikke undre, at det bliver svært, at forholde sig til, at matematikken kan bruges i andre fag og i virkelighedens verden i det hele taget. Er det i dette perspektiv problemerne med matematikkens overførselsværdi i forhold til andre fag skal vurderes? Det er nærliggende at antage det, og gennem de mange samtaler, der er med til at danne grundlaget for denne artikel, har det været tydeligt, at den instrumentale tilgang til matematikken isolerer den fra omverdenen og dermed forhindrer den i at blive et brugbart redskab i forhold til andre fag.

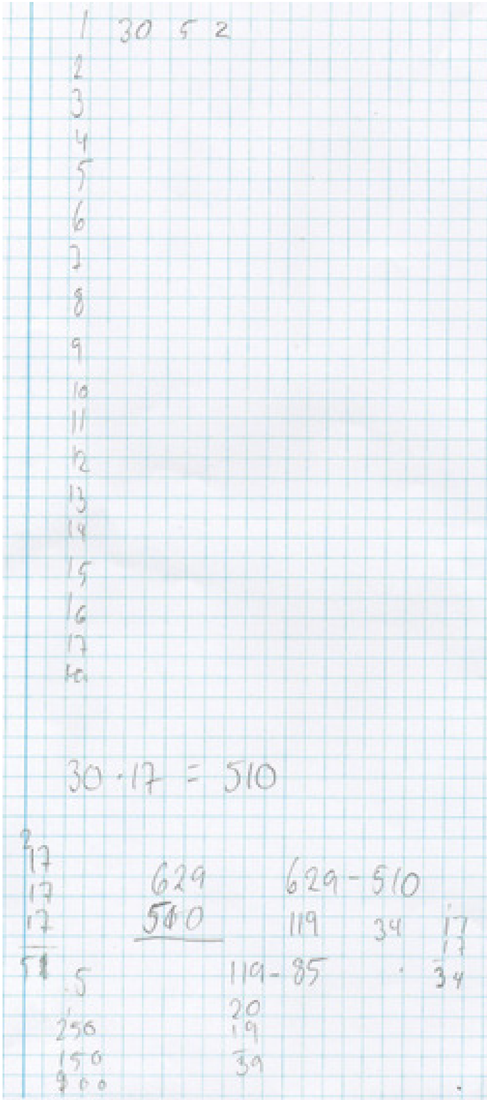
En vigtig konsekvens af undervisning i standardiserede regnemetoder er, at træning, træning og atter træning er en tvingende nødvendighed. Desværre er der meget der tyder på, at den omfattende træning ikke har den helt store effekt. Havde den det, ville der næppe være en så stor overrepræsentation af elever i metoderelaterede matematikvanskeligheder som det er tilfældet og som det afspejles i foreliggende materiale og i de mange undersøgelser og samtaler, der ligger bag.

Et eksempel



Udregningerne her til venstre viser, hvordan en elev i en ungdomsuddannelse løser opgaven 640:16. Ved den kvantitative undersøgelse, havde eleven ikke løst opgaven og havde ydermere, i sin beskrivelse af selvoplevelse i forhold til matematikken, skrevet, at hun oplevede sig selv som ”temmelig talblind uden adgang til lommeregner”. Det efterfølgende vil vise, at eleven bestemt ikke er talblind.
Ved samtalen eksemplificeredes opgaven som en situation, hvor 16 personer skulle dele 640 kr. Som det ses på udregningerne, løstes opgaven i første omgang med udgangspunkt i antal, men derefter ud fra forståelse for og anvendelse af tal som repræsentationer for antal. Mellemregningerne forneden viser talforståelsen og brugen af den og de viser samtidigt, en begyndende udvikling af egen metode til division.

En anden opgave var formuleret sådan: Hvad er 629 delt med 17. Løsningen ses her til højre.
I første omgang brugtes antalstilgangen fra den foregående opgave, men som det ses, tog talforståelsen over og opgaven løstes hurtigt Pointen er her, at en elev, der i sin grundskoletid havde kæmpet med at lære standardiserede metoder, og samtidigt havde oparbejdet en negativ selvoplevelse, i løbet af få minutter var i stand til at udvikle en brugbar metode til division, baseret på talforståelse. Det hører til fortællingen at eleven er mor til en pige, der går i 2. klasse og at det hidtil havde været datterens far, der hjalp med matematikken men at hun nu besluttede sig til fremover selv at komme på banen med hensyn til lektiehjælpen.



Eksemplet er ikke enestående, i forhold til selvoplevelsen i forhold til matematikken. Der er tværtimod en gennemgående oplevelse, at en matematematikundervisning, der bygger på videreformidling af standardiserede metoder dels lykkes for de færreste, dels ødelægger elevens forhold til matematikken, så der er al mulig grund til at følge fagmålene med hensyn til at lade hver enkelt elev udvikle sine egne metoder, der er baserede på forståelse og ikke er udenadslære af andres metoder.

Hvilke regler gælder der på området?

En sikker måde at afgøre en diskussion på, er at tage gældende regelsæt frem, som et trumfkort og som et alternativ til refleksion.
Ovenfor er det forsøgt tydeliggjort, at der er mange gode grunde til ikke at undervise elever i standardiserede metoder til beregning indenfor de fire regnearter, så det burde egentligt være overflødigt at bringe områdets regler i spil.

Klare Mål 2001:

> *"Den enkelte elev skal have mulighed for at udvikle egne metoder til antalsbestemmelse ved addition og subtraktion. Hovedregning, lommeregner og skriftlige notater indgår i et samspil i arbejdet med tallene."*

Forenklede Fælles Mål 2014:

> *"Eleven kan udvikle metoder til beregninger med naturlige tal"*
> *"Eleven kan udvikle metoder til addition og subtraktion med naturlige tal"*
> *"Eleven kan udvikle metoder til multiplikation og division med naturlige tal"*

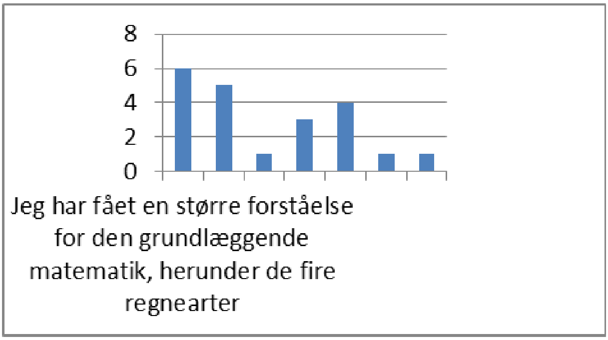
De mellemliggende fagmål er ikke taget med, men der gør sig det samme gældende: Eleverne skal ikke undervises i standardiserede regnemetoder, de skal selv udvikle deres egne via talforståelse og udvikling af regnestrategier.

Elevernes matematikoplevelser

Viden indenfor dette område er hentet fra samtalerne og fra en afsluttende spørgeskemaundersøgelse.
Samtalerne med EUD eleverne afspejler oplevelser, hvor eleverne ikke har forstået de standardiserede metoder. Metoderne er blevet gennemgået, men ikke forklaret og det er på den måde forblevet en form for trylleformularer, der skulle læres, men ikke forstås. Med skiftende lærere har der

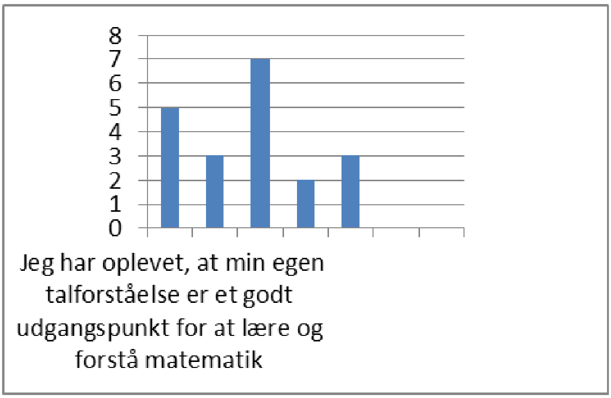
gjort sig forskellige metoder gældende, hvilket ikke har gjort det lettere. Med den manglende forståelse og manglende mestring er der fulgt en oplevelse af ikke at være dygtig nok og dermed er grunden til en negativ selvoplevelse og manglende tro på egne muligheder lagt. En elev forklarede, at læreren og stedfaderen i fællesskab konkluderede, at det var dumhed. Med til fortællingen hører, at elevens talforståelse var god og at en indsats, der havde bygget på den ville have givet et helt andet resultat.
En stor del af eleverne erklærede under samtalerne, at de hadede matematikken i særdeleshed og skolen generelt.
Som tidligere anført, er der mange læringspartnere omkring den enkelte elev, men de har tilsyneladende stort set alle været enige om den instrumentale tilgang til matematikken.
Ved afslutningen af samtaleforløbet blev eleverne stillet overfor 7 udsagn, hvor de skulle tilkendegive enighed eller uenighed på en skala fra 1 til 7. 1 var enig og 7 uenig. Der skulle både tages stilling til oplevelsen af samtalerne og til matematikken i grundskolen.

Jeg har fået en større forståelse for den grundlæggende matematik, herunder de fire regnearter
Jeg har fået en større tro på at kunne lykkes med matematikken
Jeg har oplevet, at min egen talforståelse er et godt udgangspunkt for at lære og forstå matematik
Jeg skulle lære bestemte regnemetoder uden nødvendigvis at forstå dem
Jeg holdt meget af matematikken i grundskolen
Jeg havde let ved at lære metoder og formler udenad
Der blev taget udgangspunkt i min talforståelse og mine behov for at lære og forstå matematik

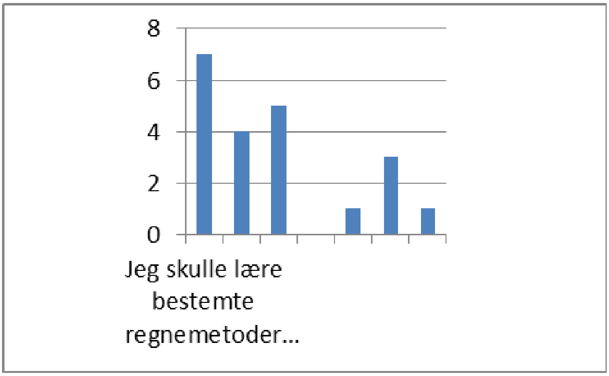


Under samtalerne er der taget udgangspunkt i elevernes talforståelse og de har alle kunnet løse testopgaverne, når der blev taget udgangspunkt i talforståelsen med anvendelse af konkreter. For eksempel gav flere af eleverne udtryk for, at det at forholde sig til en opgave som 640:16 som en fordeling af penge, hjalp dem til at forstå matematikken. Der blev ofte givet udtryk for forbavselse over at det var så enkelt og at oplevelsen fra grundskolen var, at regneoperationer handlede om en bestemt metode, der ikke måtte fraviges. Ved undersøgelsen er tendensen at der er enighed i udsagnet.

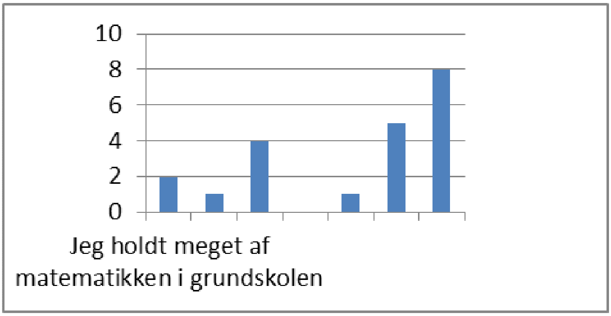
Et væsentligt formål med samtalerne og det, at der bliver taget udgangspunkt i elevens talforståelse var at give eleven en oplevelse af, at kunne forstå og bruge den involverede matematik. 7 elever tilkendegiver, at de har fået større selvtillid og 2 tilkendegiver, at det har de ikke.



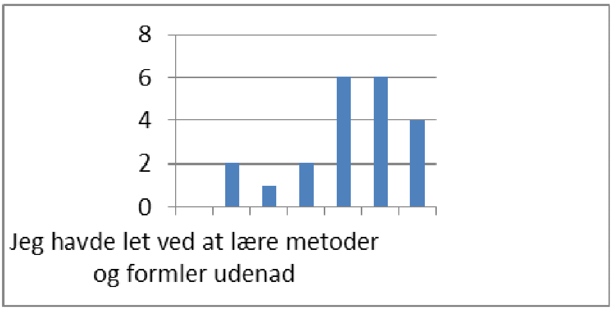
Under samtalerne viste alle elever en god talforståelse. Elevernes egen oplevelse bekræfter det, men er knap så entydig som intervieweren s oplevelse.



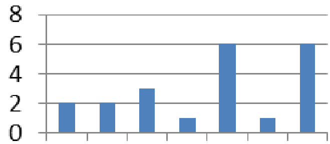
Samtalerne viste, at undervisning i standardiserede metoder er meget udbredt og undersøgelsen bekræfter oplevelsen. Der er mange læringspartnere omkring den enkelte elev, der underviser i standardiserede regnemetoder, men de svar diagrammet her afspejler, peger først og fremmest på skolen. Det hører med til fortællingen, at en stor del af eleverne her forlod grundskolen før 2001.



Samtalerne afdækkede en negativ holdning til grundskolens matematikundervisning og undersøgelsen bekræfter oplevelsen. Den negative holdning smittede af på holdningen til skolen.



Det er ingen let opgave, at overtage andres metoder.



Der er en tendens til at der ikke blev taget udgangspunkt i elevernes talforståelse i grundskolen.

Konklusion

Det er ikke ufarligt at fremføre, at matematikundervisningen skal holde op med at sigte mod at lære eleverne standardiserede metoder, men lade eleverne udvikle deres egne. Der er ofte store følelser involveret, for sådan blev man som underviser selv undervist, og det gik jo godt nok, eller gjorde det?
Specielt i de gymnasiale uddannelser har eleverne ved samtalerne ofte sagt, at de havde en meget dygtig lærer, men at vedkommende kun kunne forklare matematikken på en måde, og at den samme forklaring blev gentaget, hvis der blev spurgt. Beskrivelsen passer fint på en instrumental forståelse for matematikken, og den afspejler den grundlæggende problematik, som Richard Skemp påpeger i sin artikel fra 1976, at læring, der ikke er baseret på forståelse har en begrænset anvendelighed.

De undersøgelser, der ligger til baggrund for materialet her, viser entydigt, at en stor del af undervisningen i matematik har drejet som at videreformidle standardiserede metoder indenfor især de fire regnearter.
Det skal derfor påpeges, at det drejer sig ikke om at pege nogen som helst ud, det drejer sig om på et så oplyst grundlag som muligt, at kunne gøre sig nogle fagdidaktiske overvejelser i forhold til matematikundervisningen.

Den simple konklusion er derfor, at man som elevens læringspartnere skal afholde sig fra at undervise i standardiserede regnemetoder og følge de gældende fagmål.

Personally, I doubt if it is necessary to teach the standard algorithms at all. If teachers and pupils (or pupils' parents) insist, the teaching of them *should be postponed to perhaps the sixth or seventh school year. By then, the pupils have, hopefully, already acquired good number sense, and therefore the teaching of the algorithms will not do any harm*

The teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils own methods, Rolf Hedrén

Spørgsmålet om, hvordan den opgave løses er mere omfattende og lå ikke indenfor rammerne af dette indlæg, der først og fremmest sigter mod at belyse nogle af de problemer undervisning i standardiserede regnemetoder skaber.

Et vigtigt forhold i forhold til emnet må nødvendigvis også omfatte den officielle holdning til faget, og den er tydeligvis en hybrid. Fagmålene er ret klare, men evalueringerne af opfyldelsen af fagmålene er det til gengæld ikke. Der er en skønsom blanding af formative og summative evalueringer, med hovedvægten på sidstnævnte. Enkle – og billige – målinger er i sagens natur summative og summative målinger har det med at inspirere til udenadslære og metodeterpning. Kan vi for alvor forvente en ændring i undervisningskulturen, når testning og eksaminer favoriserer den instrumentale og reproducerende undervisning?
Til detaljen hører også det forhold, at en del elever både lærer og bruger standardiserede regnemetoder uden problemer, og det skal selvfølgelig tages med i de didaktiske refleksioner. Undersøgelsen fra 2012 viste, at 25% af eleverne på en 7. årgang lærte at mestre standardiserede metoder indenfor de fire regnearter.
Spørgsmålet om, hvordan opgaven med at tilgodese både de forholdsvis få elever, der trives med metodebaseret læring og den store gruppe, der ikke gør det, er mere omfattende og ligger ikke indenfor rammerne af dette indlæg.

Opgaven med at bevæge sig bort fra undervisning i standardiserede metoder handler om, hvad der skal sættes i stedet, men det handler også om, at være kritisk overfor de mange tilbud om, matematikmaterialer der findes. Et væld af hjemmesider tilbyder, som tidligere nævnt, stribevis af forklaringer på, hvordan matematikken skal forstås og har oftest det tilfælles, at de er instrumentale i deres matematikforståelse, så det er måske ikke lige her hjælpen er bedst. De nyere sider er ofte hybrider, der lægger op til udvikling af regnestrategier, men alligevel falder for fristelsen til at introdu-

cere standardiserede metoder. Det er besnærende at kunne se, hvordan man skal bruge standardiserede metoder til beregninger indenfor for eksempel de fire regnearter, men det er en fælde, for læringen er ikke holdbar, og den har en tendens til at overskygge talforståelsen og stå i vejen for udvikling af regnestrategier.
En viden om, hvordan børn udvikler matematisk forståelse må derimod være første skridt, og i litteraturlisten er der nævnt en del gode bud på, hvor den viden kan søges.

Gennem arbejdet med metoderelaterede matematikvanskeligheder har jeg været så heldig at få lejlighed til at arbejde sammen med Jeppe Gorm Frederiksen, HTX i Svendborg. Rapporten her baserer sig i høj grad på dette samarbejde og de utallige samtaler vi har haft om "Algoritis", som Jeppe meget passende betegner de vanskeligheder metodebaseret undervisning bringer et stort antal elever i. En stor tak for de mange værdifulde bidrag.

"Algoritis" er en påført lidelse, men en lidelse, der kan helbredes. Det er således vanskeligt at undskylde ikke at yde en indsats for at hjælpe de mange børn og unge, der har fået den og derigennem har mistet troen på at kunne lykkes med matematikken og ofte i tilgift har mistet troen på at kunne lykkes med uddannelse.

Med venlig hilsen
Peter Albrekt

Litteraturforslag

Begynneropplæringen, Marit Johnsen Høines, 1998
Det matematiske barnet, Ida Heiberg Solem og Elin Kirsti Lie Reikerås, 2008
Sådan tænker børn – sådan lærer de, Howard Gardner, 1998
Åben og undersøgende matematik, Pernille Pind, 2015
Den spørgende lærer, Astrid Kilt og Per Havgaard, 2010
Relational Understanding and Instrumental Understanding, Richard R. Skemp 1976
The teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils own methods, Rolf Hedrén
Unpacking Division to build Teachers Mathematical Knowledge, Melissa Hedges m.fl. 2004
Teaching Student-Centered Mathemstics kap. 1 (Teaching Mathematics for Understanding) John A. Van de Walle 2013

Noter

1). Begrebet underviser omfatter et bredt spektrum af læringspartnere: Lærere, forældre, søskende, kammerater etc. Undervisnings-/ læringsmaterialer i form af for eksempel instruktionsvideoer er her også tænkt som en del af undervisningsbegrebet. Der findes et stort og varieret tilbud af matematisk lærings-/undervisningsmateriale og i det indgår ofte instruktionsvideoer, hvor der gives grundige forklaringer i diverse metoder, og samtaler med elever viser, at den form for materiale i høj grad er med til at skabe de problemer, der søges beskrevet i denne artikel.

2) Faaborg Midtfyn Kommune er på 3. år med i projektet: Laboratorium for Matematikundervisning. I den sammenhæng er der arbejdet med 5 projekter:

Matematikkens Hus, der er et samarbejde mellem Midtfyns Gymnasium og områdets grundskoler.

Udvikling af undersøgelsesbaseret matematikundervisning, et samarbejde mellem Midtfyns Gymnasium og områdets grundskoler.

Math Matters, der er et samarbejde mellem Faaborg Gymnasium og grundskolerne i den sydlige del af kommunen.

Indsamling af viden om metoderelaterede matematikvanskeligheder og hvordan de afhjælpes og forebygges. I det arbejde indgår grundskolerne, gymnasierne og Svendborg Erhvervsskole.

Det Matematiske legehus, et praktisk orienteret projekt, hvor de ældste elever i Heldagshuset i Vantinge designede og byggede et legehus og gjorde erfaringer med den matematik et sådant projekt omfatter.

Der kan læses om LabMat her:
http://www.sdu.dk/om_sdu/institutter_centre/lsul/forskning/forskningsprojekter/labmat

3): De matematiske kompetencer beskrives i KOM-rapporten fra 2003 v. Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen.

4). Relational Understanding and Instrumental Understanding, Richard R. Skemp 1976

Et sammendrag

I årene 2014-2016 er der foretaget systematiske undersøgelser af matematikvanskeligheder blandt elever i grundskolernes overbygninger og i ungdomsuddannelserne i Faaborg Midtfyn Kommune.
I 2016 er der foretaget tilsvarende undersøgelser på Svendborg Erhvervsskoles HTX og EUD uddannelser.
Alle undersøgelser er fulgt op af kvalitative interviews i form af matematikvejledningssamtaler.
Undersøgelserne har specifikt drejet som om matematikvanskeligheder der kan tilskrives, at eleverne er blevet undervist i standardiserede regnemetoder indenfor de fire regnearter.

I 2014 viste undersøgelserne, at i grundskolernes overbygninger er 49% af eleverne i denne form for matematikvanskeligheder, mens tallene for de to gymnasiers vedkommende er på 28%
I foråret 2016 viste undersøgelserne, at på HTX var 44% af eleverne i denne form for matematikvanskeligheder og på EUD var det tilsvarende tal 59%
I efteråret 2016 viste undersøgelsen, at 63% af eleverne på EUD var i metoderelaterede matematikvanskeligheder, men suppleret med viden fra de kvalitative interviews, viste tallet sig at være 81%

Gennem samtalerne blev det endvidere påvist, at det først og fremmest er i skolen eleverne var undervist i de standardiserede metoder.
Der har ikke været eksempler på, at det var elevens talforståelse/ manglende talforståelse, der var anledningen til matematikvanskelighederne.
Der har tilsvarende heller ikke været eksempler på, at der ikke kunne kompenseres for de metoderelaterede matematikvanskeligheder. Det har derimod været gennemgående, at ved at tage udgangspunkt i en relationel matematikforståelse, har eleverne ret hurtigt kunne udvikle deres forståelse og deres egen tilgang til beregninger med de omhandlede regnearter.

En fællesnævner for de metoderelaterede matematikvanskeligheder var, at der var blevet undervist i, hvad man som elev skulle gøre, men ikke hvorfor. Metoderne forblev derfor uforståelige og dermed uanvendelige.
Et gennemgående træk ved den form for matematikvanskeligheder er endvidere, at metoderne overdøver talforståelsen. Eleverne stoler betyde-

ligt mere på regnemetoden, uanset hvor dårligt den fungerer, end på sig selv og talforståelsen, og det er et stort og meget grundlæggende problem.

Elevernes oplevelse af ikke at slå til i forhold til matematikken skader selvopfattelsen, troen på egne muligheder i forhold til matematikken, men påvirker også holdningen til skolen generelt.
Spørgsmålet om det rimelige i ikke at forholde sig til problematikken omkring elevernes matematikvanskeligheder og selvopfattelse i såvel grundskolen som i ungdomsuddannelserne kan med god grund rejses.
Kan elever der er i metoderelaterede matematikvanskeligheder og som i tilgift i større eller mindre grad har mistet troen på at kunne lykkes med matematikken forventes at gennemføre et optimalt uddannelsesforløb med matematikken i ungdomsuddannelserne?

Fagmålene har siden 2001 foreskrevet, at eleven udvikler sin talforståelse og derigennem også sine egne regnemetoder. Når det 15 år efter kan påvises, at et meget stort antal elever er bragt i matematikvanskeligheder som følge af undervisning i standardiserede regnemetoder, er der noget helt grundlæggende galt.

Det ville være alt for enkelt, blot at placere ansvaret hos underviserne.

Fagmålene udstikkes ovenfra, så nogle relevante spørgsmål kunne være:

Hvordan har man, samtidigt med at der er afstukket nye fagmål, sikret sig at de efterfølgende blev efterkommet?

Hvordan har den enkelte kommune sikret sig at eventuelle lokale læseplaner fulgte de overordnede fagmål og at undervisningen fulgte dem?

Hvordan har den enkelte skoles ledelse sikret sig, at der blev undervist tids– og målsvarende i matematik?

Hvordan har man sikret sig, at afsluttende prøver og løbende testning ikke lægger op til undervisning i standardiserede regnemetoder?

FAABORG-MIDTFYN
KOMMUNE