

# Algoritis

Instrumental  
matematik



FMK - Opvækst og læring

Med fokus på

Standardalgoritmer



FAABORG-MIDTFYN  
KOMMUNE

*Sammen skaber vi det bedste sted at bo*

# To meget forskellige former for matematikforståelse

**Instrumental: Hvad og hvordan**

**udspringer af algoritmer og formler  
er teoretisk og mangler overførselsværdi**

**Forstå = lære udenad**

**Relationel: Hvorfor, hvad og hvordan**

**udspringer af erfaringer i og med omverdenen  
egen udvikling af matematisk teori  
matematikken bliver et redskab til forståelse,  
problemløsning og innovation**

## Slide nummer 2

---

### PHSA(3

"De har ikke lært matematik", "de kan ikke bruge matematikken i andre fag" m.m. fremføres i ungdomsuddannelserne og på de videregående uddannelser og udtrykker samme frustration, at et er at lære matematik, noget helt andet er at kunne bruge den.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Instrumental matematik

## Kontekstuelle

problemstillinger er ofte konstruerede og bruges til afprøvning af matematiske modeller

Focus på undervisning i/formidling af metoder hvor indholdet splittes op i meningsløse dele

Eleven er passiv modtager af færdige løsningsmetoder og gennemfører endeløs træning

# Relationel matematik

## Kontekstuelle

problemstillinger bruges til at skabe matematisk forståelse og udvikle matematisk teori

Focus på undersøgende og reflekterende arbejde med matematikken

Eleven er aktiv deltager i læringsprocessen og udvikler selv matematisk teori og forståelse

### Slide nummer 3

---

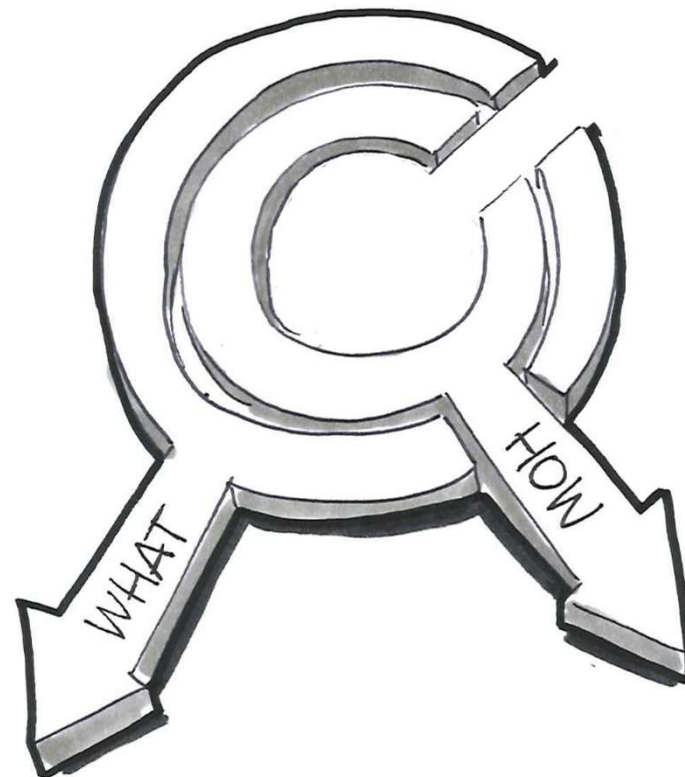
**PHSA(4**

Det giver næsten sig selv, at en teoretisk matematik, der er løsrevet fra dens anvendelse, vil mangle overførselsværdi til andre fagområder.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

**Når udgangspunktet er  
matematik teori  
andre har udviklet,  
og du skal lære  
den, ikke  
nødvendigvis  
forstå den, så**

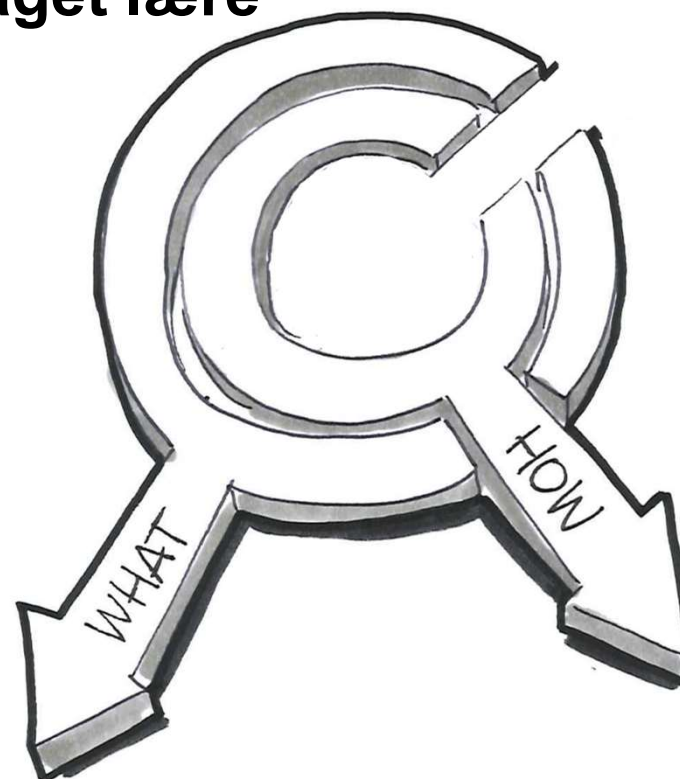
**efterspørger du  
hvad du skal gøre og  
bekymrer dig ikke om hvorfor**



**Eleven vil ofte stille spørgsmålene:**

**Kan du ikke bare fortælle mig, hvad jeg skal gøre?  
og hvorfor skal jeg i det hele taget lære  
matematik?**

**”Fordi du får brug for det og  
fordi det står i fagplanen”  
er ikke tilstrækkelige svar**



## Slide nummer 5

---

### PHSA(5

Når en elev efterspørger, hvad der forventes at skulle gøres, frem for at efterspørge, hvad matematikken kan bruges til, må der være et misforhold mellem matematikkens brugsværdi og den praktiserede undervisning, der mangler noget meget vigtigt.

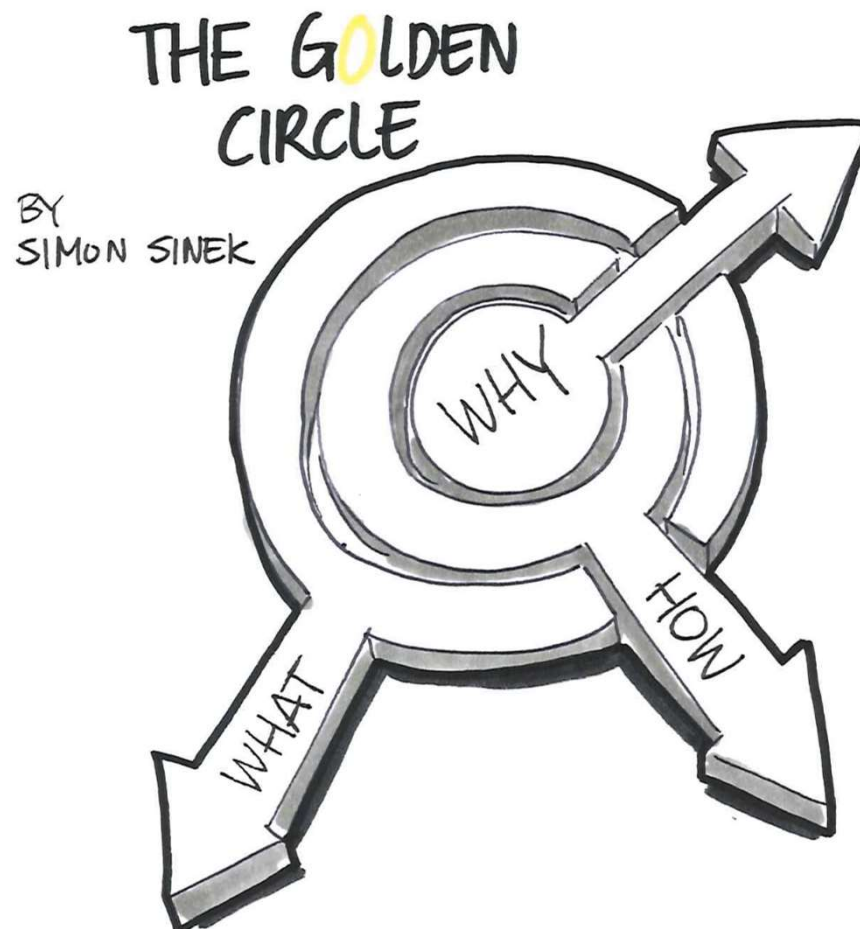
Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020



Der må nødvendigvis altid skulle være  
et brugbart

**Hvorfor**

**Hvorfor er  
meningen  
med det hele**



## Slide nummer 6

---

### PHSA(6

Elever er også rationelle væsener og det er derfor vigtigt at kunne se meningen med faget. Vi kan bare spørge os selv, om vi er motiverede for at udføre opgaver vi ikke kan se mening med.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Relational Understanding and Instrumental Understanding

Richard Skemp

Department of Education, University of Warwick

1976

**Slide nummer 7**

---

**PHSA(19**

**En meget læseværdig artikel.**

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Hvorfor undervises der overhovedet instrumentalt?

## Slide nummer 8

---

### PHSA(20

Når læseplanerne siden slutningen af det 20. århundrede har lagt op til en ikke-instrumental undervisning, kan det undre, at der stadigvæk undervises på den måde og at træning mere eller mindre er et mål i sig selv.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

**Hvorfor undervises der  
overhovedet  
instrumentalt?**

**En væsentlig del af forklaringen skal  
søges i den  
summative testning**

## Slide nummer 9

---

### PHSA(7

Teaching to the test forekommer ikke kun i det store udland, og det fremføres ofte, at når underviserens indsats vurderes på resultaterne ved testningen, er det en undervisning, der er målrettet testen, der leveres.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020



**Hvorfor undervises der  
overhovedet  
instrumentalt?**

**En væsentlig del af forklaringen skal  
søges i den  
summative testning**

**og troen på at den form for testning  
viser, hvad eleven kan, ikke kan og vil  
kunne komme til at kunne**

## Slide nummer 10

---

**PHSA(8**

Når 31 forskere, ikke i matematikdidaktik, går på barrikaderne for at bevare de nationale test, der sikrer dem et uvurderligt forskningsmateriale, kan det være svært at få afskaffet den form for testning

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Ved en summativ test svares:

$$11 - 10 = 2$$

**PHSA(9**

Jeg vil prøve at underbygge min påstand om summativ testnings manglende troværdighed

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Ved en summativ test svares:

$$11 - 10 = 2$$

## Er der tale om dyskalkuli?

**PHSA(10**

Er det ikke tydeligt, at denne elev ikke kan regne og ikke har nogen form for talforståelse?

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Godt på vej mod algoritis

$$11 - 10 = 2$$

Er der tale om dyskalkuli?

Nej! Eleven er i gang med at lære en algoritme

Og på vej i matematikvanskeligheder



# Elevens forklaring:

$$11 - 10 = 2$$

11  
10

*”Tallene til venstre  
skal stå over  
hinanden”*





# Elevens forklaring:

$$11 - 10 = 2$$

11  
10

*"Tallene til venstre  
skal stå over  
hinanden"*

$$1 + 1 = 2$$

(En elev på 2. årgang)



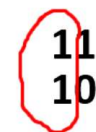
**PHSA(11**

Hvis eleven ikke bliver set og hørt, er der ingen tvivl om, at vedkommende vil komme i matematikvanskeligheder, men hvem vil have ansvaret?

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

Til overvejelse:

$$11 - 10 = 2$$


$$\begin{array}{r} 11 \\ 10 \end{array}$$

*"Tallene til venstre  
skal stå over  
hinanden"*

$$1 + 1 = 2$$

Opgaven er fra en summativ testning ved skoleårets afslutning.

Formålet er at samle data, der kan beskrive elevernes udvikling gennem en årrække.

Hvilken validitet har data fra for eksempel denne elev?

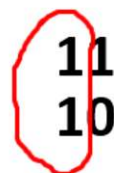
Er der en garanti for, at de elever, der har regnet alle eller de fleste af testens opgaver rigtigt, også har forstået og kan bruge matematikken?

**PHSA(12**

I af mine undersøgelser interviewede jeg også nogle af de elever, der havde svaret rigtigt på alle screeningsopgaverne, og det viste sig, at de havde lært teknikkerne men de forstod ikke matematikken. Det var elever på HTX. Vi har i det 21. århundrede ikke brug for den form for læring, det har vi computere til.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

$$11 - 10 = 2$$


$$\begin{array}{r} 11 \\ 10 \end{array}$$

*”Tallene til venstre  
skal stå over  
hinanden”*

$$1 + 1 = 2$$

**Vi får kun en brugbar viden fra den summative testning, når den gøres formativ, det vil sige når den følges op med samtale med den enkelte elev, så vi ved hvorfor der er svaret forkert og hvordan vi kan hjælpe eleven.**

**PHSA(12**

I af mine undersøgelser interviewede jeg også nogle af de elever, der havde svaret rigtigt på alle screeningsopgaverne, og det viste sig, at de havde lært teknikkerne men de forstod ikke matematikken. Det var elever på HTX. Vi har i det 21. århundrede ikke brug for den form for læring, det har vi computere til.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Flere interessante algoritme fejl

$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10+ \\ 100 \\ \hline 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \quad 10 \\ \cancel{7} \quad 6 \\ + 87 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \quad 10 \\ \cancel{7} \quad 6 \\ + 87 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 140 \\ + 70 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$25 \cdot 16 = \underline{2630}$$

~~$$\begin{array}{r} 25 \cdot 16 \\ 100 \\ 200 \\ \hline 2630 \end{array}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 4444 \\ 100 \quad 100 \quad 100 \quad 100 \end{array}$$~~



$$\begin{array}{r} - 712 \\ 245 \\ \hline 533 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{r} 76 \\ 87 \\ \hline \underline{\underline{28}} \end{array}$$

# Eleven kan ikke regne – eller ?

$$\begin{array}{r} 76 \\ + 87 \\ \hline 28 \end{array}$$



## Slide nummer 19

---

**PHSA(13** Her er en elev, der let kunne blive dømt ude.  
Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

Eleven kan godt regne, men algoritmen står i vejen

$$\begin{array}{r} 76 \\ + 87 \\ \hline \underline{\underline{28}} \end{array}$$

		14
7	6	
8	7	
		14

Diagonalt:  $7 + 7 + 8 + 6 = 28$

Eleven kan godt regne, men  
algoritmen står i vejen

$$\begin{array}{r} 76 \\ + 87 \\ \hline \underline{\underline{28}} \end{array}$$

		14
7	6	13
8	7	15
		14

Diagonalt:  $7 + 7 + 8 + 6 = 28$

Vandret:  $7 + 6 + 8 + 7 = 28$

Eleven kan godt regne, men  
algoritmen står i vejen

$$\begin{array}{r} 76 \\ + 87 \\ \hline \underline{\underline{28}} \end{array}$$

		14
7	6	13
8	7	15
15	13	14

Diagonalt:  $7 + 7 + 8 + 6 = 28$

Vandret:  $7 + 6 + 8 + 7 = 28$

Lodret:  $7 + 8 + 6 + 7 = 28$

$$\begin{array}{r} 29 \\ +13 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10+ \\ 100 \\ \hline 200 \end{array}$$

Overvej sammen med sidemanden:  
Elevernes fejl, deres  
talforståelse og  
hvordan de kan hjælpes



$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$9 + 3 = 12$$

Der byttes om på cifrene

$$2 + 1 + 1 = 4$$

Eleven forholder sig til  
positions værdierne

$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ + 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

Regnestrategier:

$$10 + 10 = 20$$

$$9 + 3 = 12$$

$$20 + 12 = 32$$

$$19 + 13 = 20 + 12 = 32$$

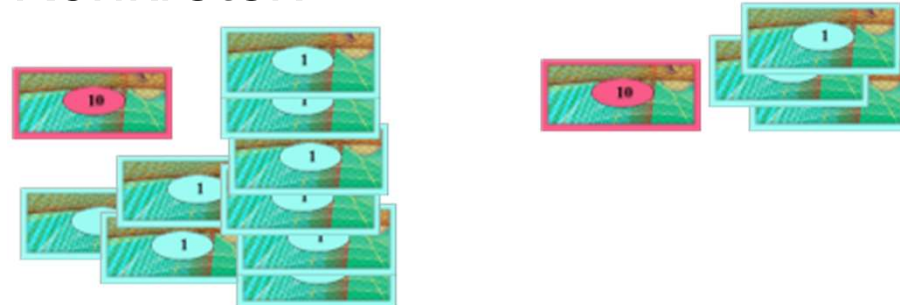
$$9 + 3 = 12$$

Der byttes om på cifrene

$$2 + 1 + 1 = 4$$

Eleven forholder sig til  
positions værdierne

Konkreter:



$$\begin{array}{r} 10 + \\ 100 \\ \hline 200 \end{array}$$

Tallene justeres mod  
venstre og  
Lægges sammen

Kan eleven forholde sig til  
positionsværdierne?



A handwritten addition problem on a grid background. The numbers are written in black ink. The first line shows '10' followed by a plus sign. The second line shows '100'. A horizontal line is drawn under the '100'. The third line shows the result '200'.

Eleven (5.kl) blev bedt om at lægge 1, 2 og 10 til 100, men kunne se det oprindelige svar

$$100 + 1 = 101$$

$$100 + 2 = 102$$

$$100 + 10 = 200$$

$$\begin{aligned}100 + 1 &= 101 \\100 + 2 &= 102 \\100 + 3 &= 103 \\100 + 4 &= 104 \\100 + 5 &= 105 \\100 + 6 &= 106 \\100 + 7 &= 107 \\100 + 8 &= 108 \\100 + 9 &= 109 \\100 + 10 &= 110\end{aligned}$$

Ved at skulle lægge tal fra 1 til 10 til 100 mundtligt og i hurtig rækkefølge nåede eleven frem til forståelsen og gav udtryk for en aha-oplevelse

Algoritmen  
ødelagde  
talforståelsen

# Er det ikke bare eleverne, det er galt med?

Hvad får du hvis du trækker 1759 fra 2495 ? 1344

$$\begin{array}{r} 2495 \\ - 1759 \\ \hline 1344 \end{array}$$

**PHSA(15**

Eleven trækker konsekvent det mindste tal fra det største uanset om det står for oven eller for neden.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

Når en elev i sin tidlige matematikundervisning har lært, at man kun kan trække et mindre tal fra et større, skal det give

Hvad får du hvis du trækker 1759 fra 2495 ?

1344

problemer

$$\begin{array}{r} 2495 \\ - 1759 \\ \hline 1344 \end{array}$$

men når eleven i løbet ca. 10 minutters samtale kan udlede de almene regler for potensregning, er det næppe vedkommendes matematiske forudsætninger, det er galt med.

$$144 / 12 = 12$$

$$10 \cdot 12 = \del{120} 120$$

$$2 \cdot 12 = 24$$

$$120 + 24 = \underline{144}$$

$$169 / 13$$

$$A^n \cdot A^p = A^{n+p}$$

$$A^n / A^p = A^{n-p}$$

$$A^n / A^n = A^0 = 1$$

$$2^2 / 2^2 = 2^0 = 1$$

$$4 / 4 = 1$$

$$100 \cdot 100 = 10.000$$

$$10^2 \cdot 10^2 = 100^2 / 10^4$$

$$10^2 \cdot 10^3 = 100.000 = 10^5$$

$$10^5 \cdot 10^3 = 10^8$$

$$10^3 \cdot 10^4 = 10^7$$

$$10^5 \cdot 10^5 = 10^{10}$$

$$10^n \cdot 10^p = 10^{n+p}$$

$$10^3 / 10^2 = 10^1$$

$$10^n / 10^p = 10^{n-p}$$

$$10^{-1} =$$

$$10^2 / 10^3 = 10^{-1}$$

$$100 / 1000 = 0,1$$



# Hvor omfattende er problemstillingen?

## 2014 LabMat (Laboratorium for Matematikundervisning)

	Symbol				Sprog				Kontekst			Point	Genn.	Algoritme problemer					
	add	sub	div	mul	add	sub	div	mul	div	sub	mul			afadd	afsub	afmul	afdiv	I alt	
Antal	136	131	126	81	93	136	101	51	101	84	111	102	1117	8,213	0%	18%	23%	26%	49%
Resultat															98%	83%	73%	53%	75%

49% af eleverne i grundskolernes overbygning er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

Antal	101	95	98	79	80	101	81	62	75	69	86	81	901	8,921	0%	10%	14%	12%	28%
Resultat															97%	87%	78%	69%	81%

28% af eleverne i 1. G er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

## 2015 35% af eleverne i 1. G er i algoritmerelaterede matematikvanskeligheder

Antal	106	98	103	88	84	104	86	69	83	86	94	87	982	9,2642	1	17	17	16	37
Resultat															1%	16%	16%	15%	35%

# 2016

44% af eleverne på HTX er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

Antal	141	133	137	106	108	140	113	65	103	101	122	115	1243	8,8	0	19	33	29	62	62
Resultat		94%	97%	75%	77%	99%	80%	46%	73%	72%	87%	82%			0%	13%	23%	21%	44%	44%

59% af eleverne i EUD er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

Antal	29	27	27	9	22	29	19	5	19	13	18	15	203	7	0	10	6	10	17	17
Resultat		93%	93%	31%	76%	100%	66%	17%	66%	45%	62%	52%			0%	34%	21%	34%	59%	59%

81% af eleverne på to hold voksenlærlinge er i matematikvanskeligheder, der kan henføres til, at de er undervist i standardalgoritmer

		Symbol				Sprog				Kontekst			Brøker					Algoritme problemer						
		add	sub	div	mul	add	sub	div	mul	div	sub	mul				Point	Genafadd	afsub	afmul	afdiv	I alt	Forekon		
Navn	Klasse	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	15							
Antal	27	26	25	12	15	27	18	8	15	15	17	21					293	11	1	11	14	18	22	22
Resultat		96%	93%	44%	56%	100%	67%	30%	56%	56%	63%	78%						4%	41%	52%	67%	81%	81%	





# 2018/19 – en 7. klasse i Faaborg Midtfyn Kommune

Symbol				Sprog				Kontekst			Brøker					Algoritme problemer						
add	sub	div	mul	add	sub	div	mul	div	sub	mul	12	13	14	15	Point	Genn.	afadd	afsub	afmul	afdiv	I alt	Forekomst
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17							
3621	3212	40	400	2017	736	37	228	12	701	152	1/4	1/6	1/2	1/2	3/4	1						
1	1	1	am	1	as	ad	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	3	1
1	as	0	0	1	as	0	0	0	as	0	1	0	1	1	0	0	0	3	0	0	1	1
1	1	1	1	1	as	ad	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	2	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	ad	1	1	as	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	2	1
1	1	1	1	1	1	ad	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	ad	0	1	1	ad	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	2	1	1
1	1	1	am	1	as	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	6	0	1	1	0	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17	0	0	0	0	0	0
1	0	ad	1	1	1	ad	1	0	1	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	2	1
1	1	ad	0	1	1	ad	am	ad	1	0	0	0	1	1	0	7	0	0	1	3	2	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	as	0	1	0	as	0	1	1	1	1	0	9	0	2	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	ad	1	1	1	1	1	0	1	1	1	14	0	0	0	1	1	1
1	1	ad	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	1	1	1
1	1	ad	am	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	1	1	2	1
1	1	0	0	1	as	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0	0	1	1
1	1	ad	am	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5	0	0	1	1	2	1
1	1	1	1	1	0	ad	1	1	1	1	0	0	0	0	0	8	0	0	0	1	1	1
21	19	19	12	10	21	10	3	13	10	12	10	12	6	12	12	199	9,476	0	7	5	12	16
90,48%	90,48%	57,14%	47,62%	100,00%	47,62%	14,29%	61,90%	47,62%	57,14%	47,62%	57,14%	28,57%	57,14%	57,14%	38,10%	47,62%	0,00%	33,33%	23,81%	57,14%	76,19%	76,19%

Screeningen viste, at 70% af eleverne havde Algoritis, men da samtalerne var færdige, viste tallet sig at være 76,19%  
Ingen af eleverne behøvede at være i matematikvanskeligheder

# Elevbemærkninger

Kan ik

Det er noget lort og jeg har det svært med at gange og divider og jeg kan ikke holde til at lave så meget ad gangen

Jeg synes det er svært men jeg vil så gerne lære det i 5kl blev jeg erklæret talblind. Jeg er meget afhængig af min lommeregner, på grund af min udfordring.

Der hvor jeg har det sværest ved det er når vi har om minus, decimaltal.

Pisser mig af fuckr af når man har en ide og man er i gang med at regne så glemmer man det.

Der er lidt for mange opgaver som er det samme

Altså matematik har aldrig rigtig været mig, eller jo fra 0 til 2. ellers har jeg aldrig brudt mig særlig om det.

Jeg har ret nemt ved det meste, men jeg kan ikke finde ud af at dividere med 10'ere

Fint nok

**PHSA(21**

Det er lidt deprimerende, når så mange elever får så dårlig en oplevelse med noget så vigtigt som matematikken.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

Instrumental undervisning er ødelæggende for talforståelsen for et stort antal elever.

Manglende talforståelse forhindrer matematisk læring og skaber matematikvanskeligheder.

Matematikvanskeligheder er ødelæggende for troen på at kunne lære matematik.

Matematikvanskeligheder er invaliderende.

**PHSA(22**

De omfattende undersøgelser i regie af Laboratorie for Matematik, LabMat, giver et solidt belæg for disse påstande:

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Klare Mål 2001

- *”Den enkelte elev skal have mulighed for at udvikle egne metoder til antalsbestemmelse ved addition og subtraktion. Hovedregning, lommeregner og skriftlige notater indgår i et samspil i arbejdet med tallene.”*

**PHSA(23**

Og når læseplanerne også tager afstand fra den instrumentale matematikundervisning, må der være noget om snakken.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Forenklede Fælles Mål 2014

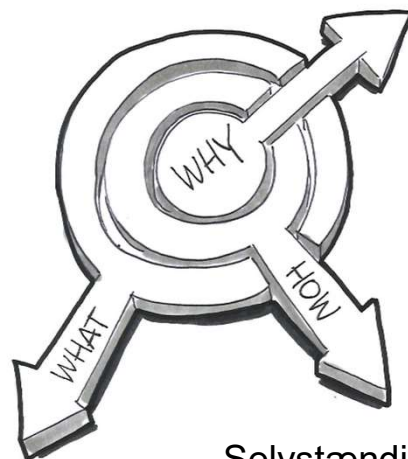
- *”Eleven kan udvikle metoder til beregninger med naturlige tal”*
- *”Eleven kan udvikle metoder til addition og subtraktion med naturlige tal”*
- *”Eleven kan udvikle metoder til multiplikation og division med naturlige tal”*



# Læseplan 2019

Der sigtes **ikke** mod opøvelsen af **standardiserede algoritmer**.

Opleve og erkende matematikkens rolle i en historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng, og gøre i stand til at forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse. Få mulighed for at forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse ved at deltage i udviklingen af matematiske modeller og ved at reflektere over de muligheder og begrænsninger, der kan være ved konkrete modeller.



Begå sig hensigtsmæssigt i de matematikrelaterede situationer, de kan møde i deres "aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv" som borgere i et demokratisk samfund

Selvstændigt og gennem dialog erfare, at matematik "fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation" Deltage i udviklingen af begreber og metoder. Få mulighed for at opleve sig selv som en aktiv, undersøgende og ligeværdig deltager i klassens samarbejde om og med matematik.

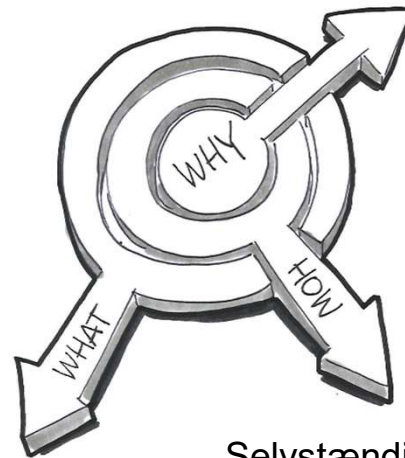
**PHSA(24** Eleverne skal udvikle talforståelse, regnestrategier og egne metoder

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Læseplan 2019

Der sigtes **ikke** mod opøvelsen af **standardiserede algoritmer**.

Opleve og erkende matematikkens rolle i en **historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng**, og gøre i stand til at forholde sig vurderende til **matematikens anvendelse**. Få mulighed for at forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse ved at **deltage i udviklingen** af matematiske modeller og ved at reflektere over de muligheder og begrænsninger, der kan være ved konkrete modeller.



Begå sig hensigtsmæssigt i de matematikrelaterede situationer, de kan møde i deres "aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv" som borgere i et demokratisk samfund

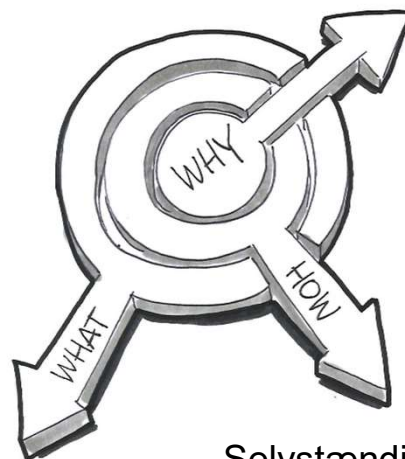
Selvstændigt og gennem dialog erfare, at matematik "fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation" Deltage i udviklingen af begreber og metoder. Få mulighed for at opleve sig selv som en aktiv, undersøgende og ligeværdig deltager i klassens samarbejde om og med matematik.

**PHSA(25** Matematik er et kulturfag, hvor anvendelsen og elevernes deltagelse er i centrum  
Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Læseplan 2019

Der sigtes **ikke** mod opøvelsen af **standardiserede algoritmer**.

Opleve og erkende matematikkens rolle i en **historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng**, og gøre i stand til at forholde sig vurderende til **matematikens anvendelse**. Få mulighed for at forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse ved at **deltage i udviklingen** af matematiske modeller og ved at reflektere over de muligheder og begrænsninger, der kan være ved konkrete modeller.



**Begå sig hensigtsmæssigt i de matematikrelaterede situationer**, de kan møde i deres "aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv" som borgere i et demokratisk samfund

Selvstændigt og gennem dialog erfare, at matematik "fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation"  
Deltage i udviklingen af begreber og metoder.  
Få mulighed for at opleve sig selv som en aktiv, undersøgende og ligeværdig deltager i klassens samarbejde om og med matematik.

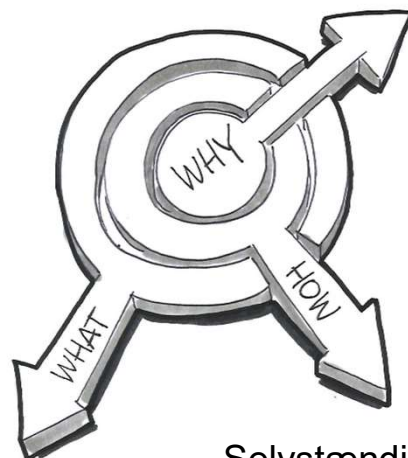
**PHSA(26** Eleverne skal kunne anvende matematikken i hverdag og uddannelse

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Læseplan 2019

Der sigtes **ikke** mod opøvelsen af **standardiserede algoritmer**.

Opleve og erkende matematikkens rolle i en **historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng**, og gøre i stand til at forholde sig vurderende til **matematikens anvendelse**. Få mulighed for at forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse ved at **deltage i udviklingen** af matematiske modeller og ved at reflektere over de muligheder og begrænsninger, der kan være ved konkrete modeller.



**Begå sig hensigtsmæssigt i de matematikrelaterede situationer**, de kan møde i deres "aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv" som borgere i et demokratisk samfund

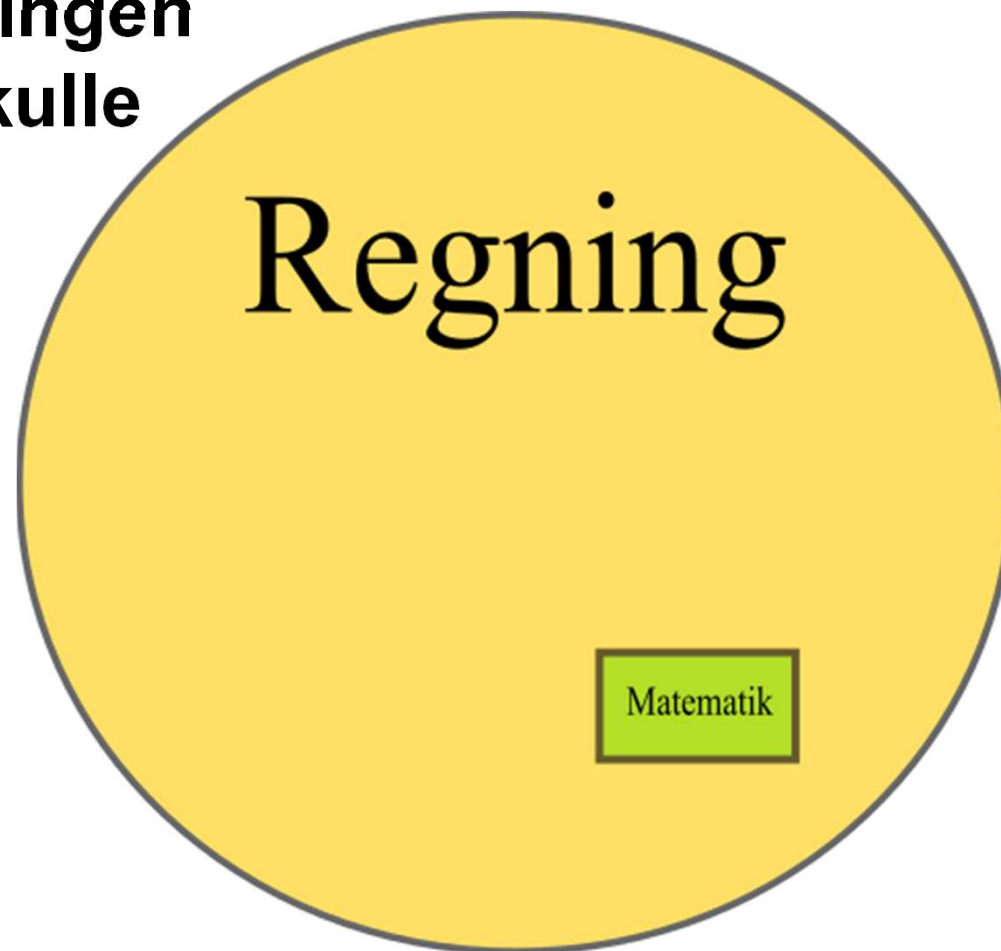
Selvstændigt og gennem dialog **erfare**, at matematik "fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation"  
**Deltage i udviklingen af begreber og metoder**. Få mulighed for at opleve sig selv som en **aktiv, undersøgende** og ligeværdig deltager i klassens samarbejde om og med matematik.





**For de mange elever, der har udviklet Algoritis har matematikundervisningen fokuseret på at de skulle lære at regne**

**Matematikken opfattes som en del af det at kunne regne**



**PHSA(28**

Hvornår skal mit barn lære at regne? Spørgsmålet dukker ofte op og vidner om en tradition, hvor vi ikke havde moderne hjælpemidler.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Matematikken er meget mere end de fire regnearter

**Over Under**

10+2=12

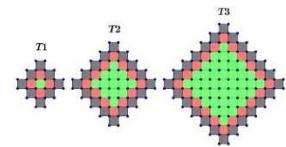
10+2=12

8+5=8+2+3=13

16:11

16:11:34

FAABORG-MIDTFYN KOMMUNE  
Sammen skaber vi det bedste sted at bo



I II III IV V VI  
1 2 3 4 5 6



0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13



16:11

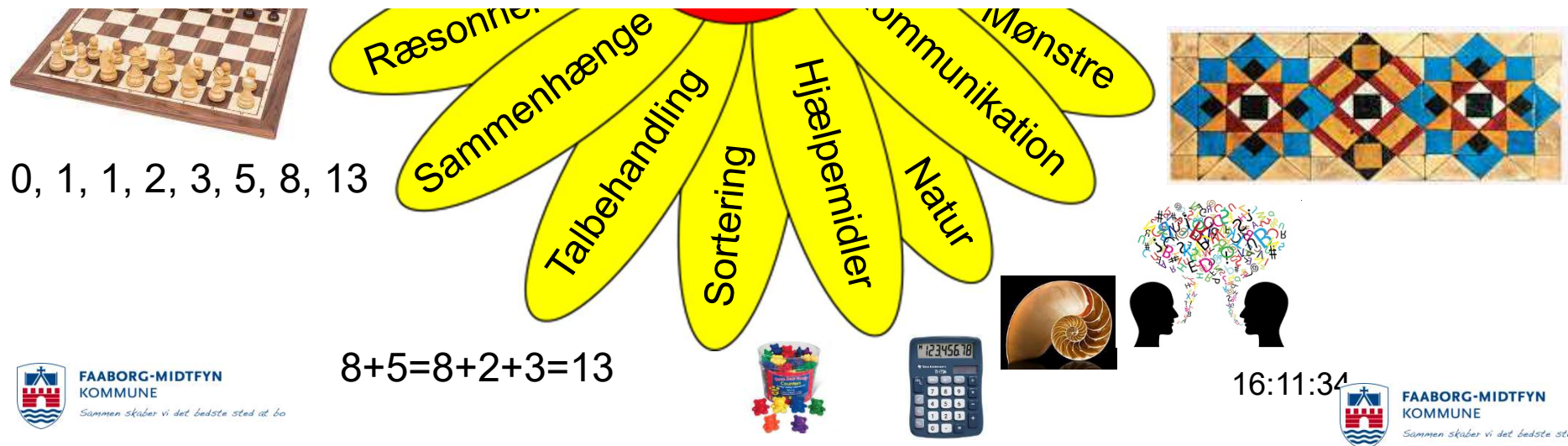
$$8+5=8+2+3=13$$

16:11:34

# Matematikken er meget mere end de fire regnearter



men når der blandt forældrene og i den summative testning er en forventning om, at alle mestrer de fire regnearter, er det svært at stå imod.



$$8+5=8+2+3=13$$

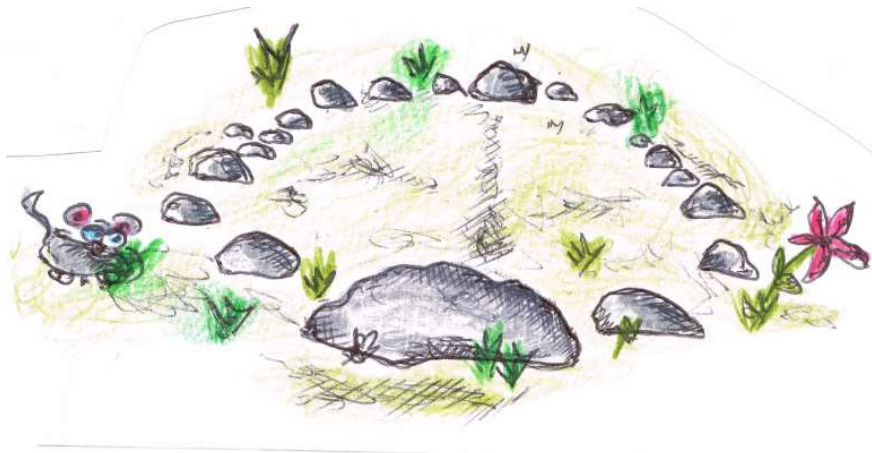
16:11:34

Hvad  
gør  
vi  
så  
?

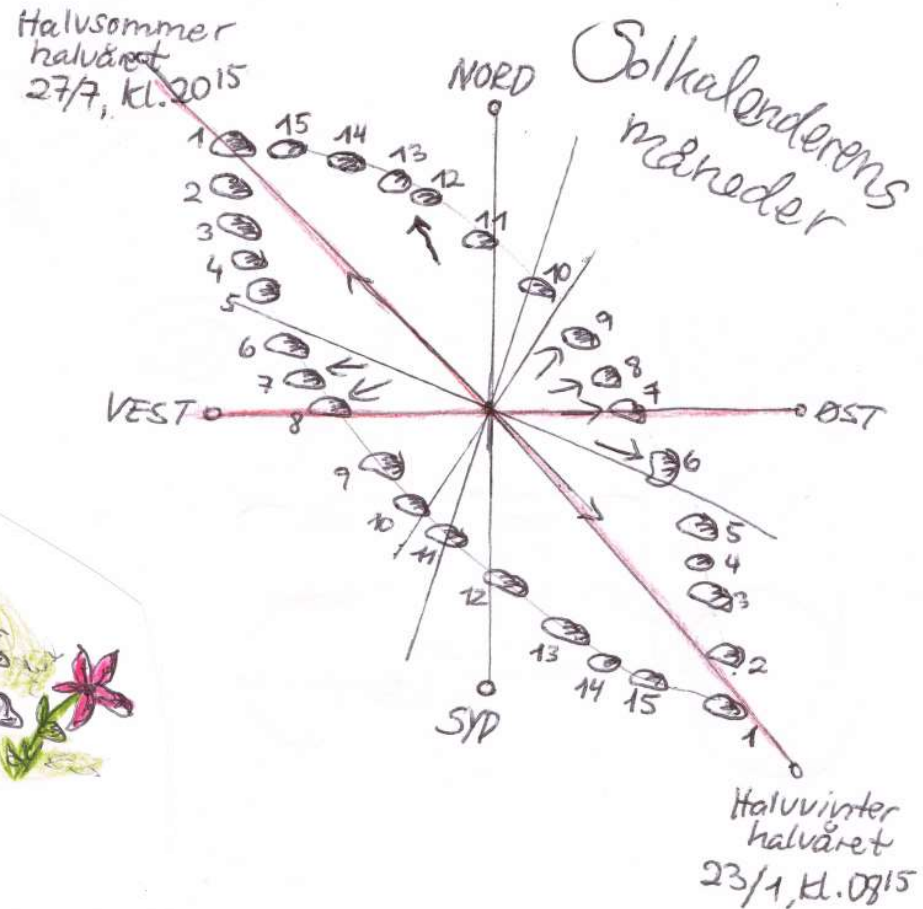


# Hvordan har den historiske udvikling formet sig?

Og kan vi lære af den?



Solkalender og solur fra ca. 1.500 f.v.t.



Kunne den historiske udvikling af matematik bruges som et udgangspunkt for den faglige progression i undervisningen?

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

Ulveknogle fra Mähren

ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



**Hvorfor** blev de første skridt i matematikkens udvikling taget for ca. 32.000 år siden?



Ulveknogle fra Mähren

ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



**Hvorfor** blev de første skridt i matematikkens udvikling taget for ca. 32.000 år siden?

**Fordi** der var opstået et behov for at holde styr på data.

Ulveknogle fra Mähren

ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



**Hvorfor** blev de første skridt i matematikkens udvikling taget for ca. 32.000 år siden?

**Fordi** der var opstået et behov for at holde styr på data.



Ishangknoget ca. 20.000 f.v.t.

Tællestrategier og systematisering

**Hvorfor** blev der konstrueret en "lommeregner" for ca. 22.000 år siden?

Ulveknogle fra Mähren

ca. 30.000 f.v.t.

Et 5-talssystem



**Hvorfor** blev de første skridt i matematikkens udvikling taget for ca. 30.000 år siden?

**Fordi** der var opstået et behov for at holde styr på data.



Ishangknoget ca. 20.000 f.v.t.

Tællestrategier og systematisering

**Hvorfor** blev der konstrueret en "lommeregner" for ca. 22.000 år siden?

**Fordi** der var opstået behov for mere komplicerede beregninger

# Udvikling af matematik og matematisk forståelse



Matematikken udspringer af konkrete og af hverdagens behov for brug af data



Den konkrete matematik, matematikken i omverdenen, og matematikken i hverdagen



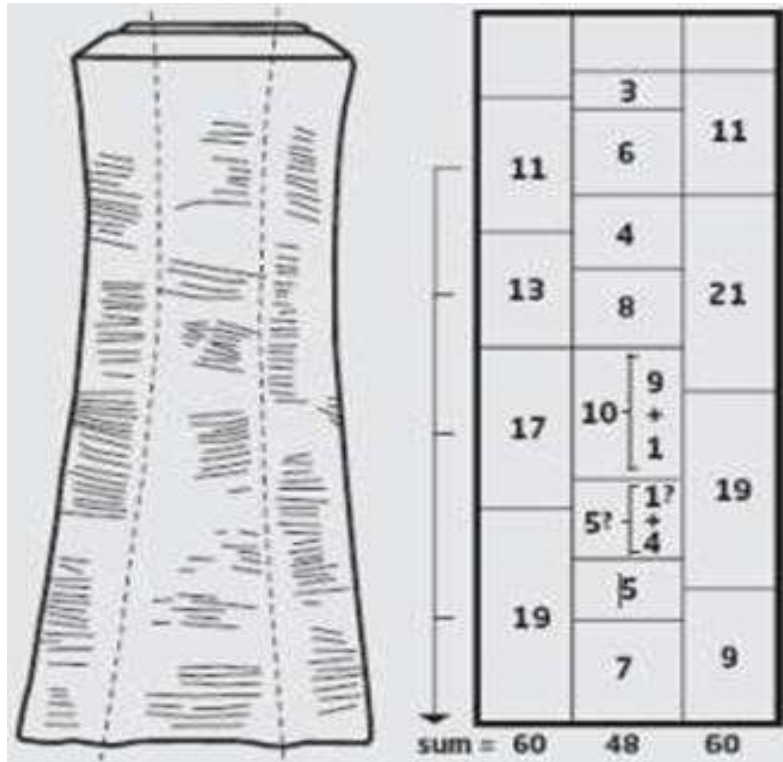
Lægger grundlaget for senere at opleve at matematikken kan hjælpe til en bedre hverdag



*(Frit efter Freudenthal)*

Matematikens sprog, symboler, begreber og teori

# Talforståelse og regnestrategier

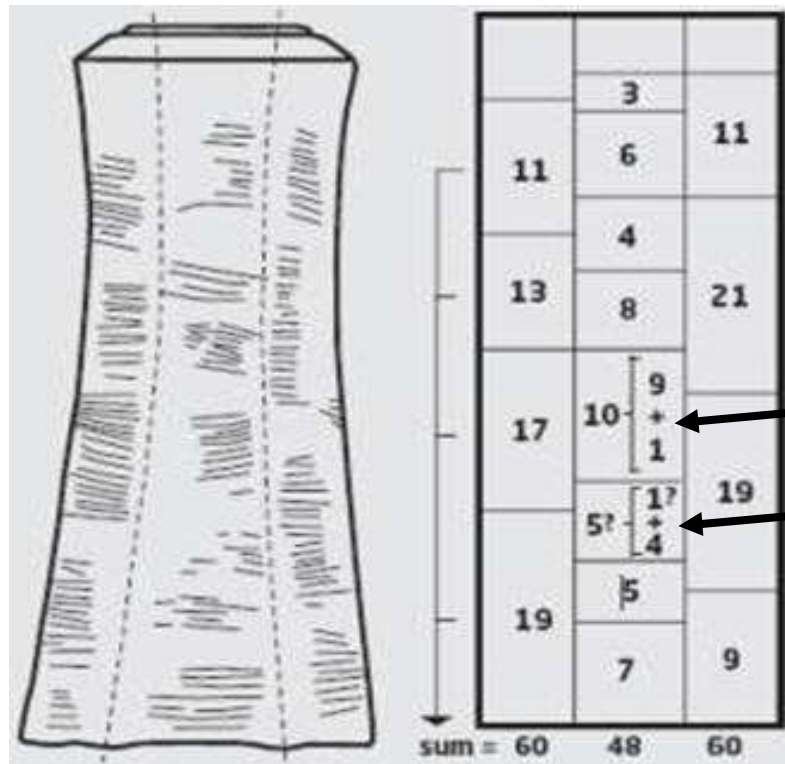


Om at opleve og erkende matematikkens rolle i en **historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng**,

**PHSA(18** Ishangknoglen er et godt eksempel på matematikkens udvikling. Meget tyder på, at der er opstået et behov for mere komplicerede udregninger og dermed også for talforståelse og regnestrategier.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Talforståelse og regnestrategier

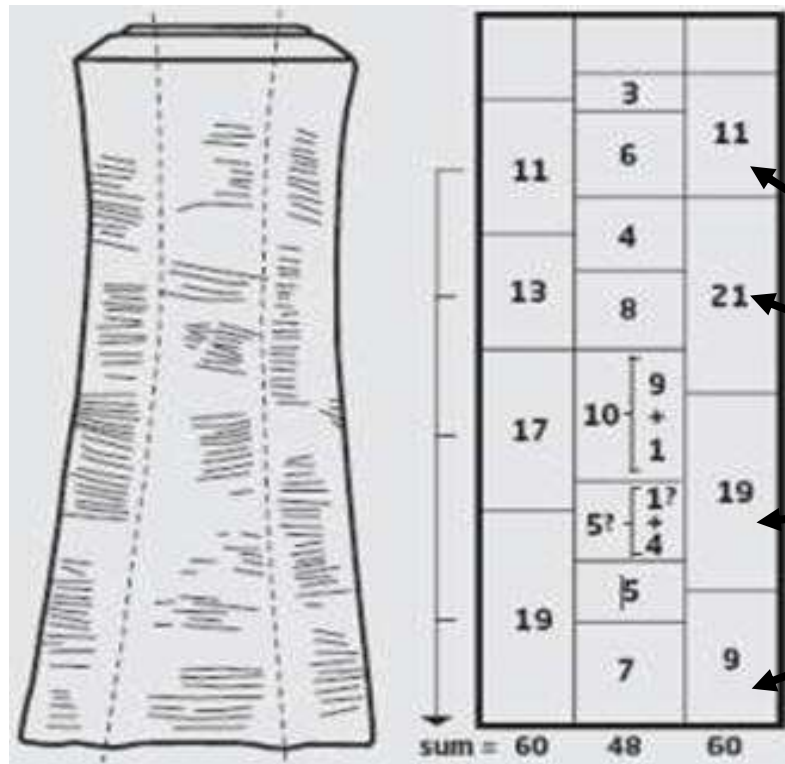


Om at opleve og erkende matematikkens rolle i en **historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng**,

Tiervenner

Femmervenner

# Talforståelse og regnestrategier



Om at opleve og erkende matematikkens rolle i en **historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng,**

$10 + 1$

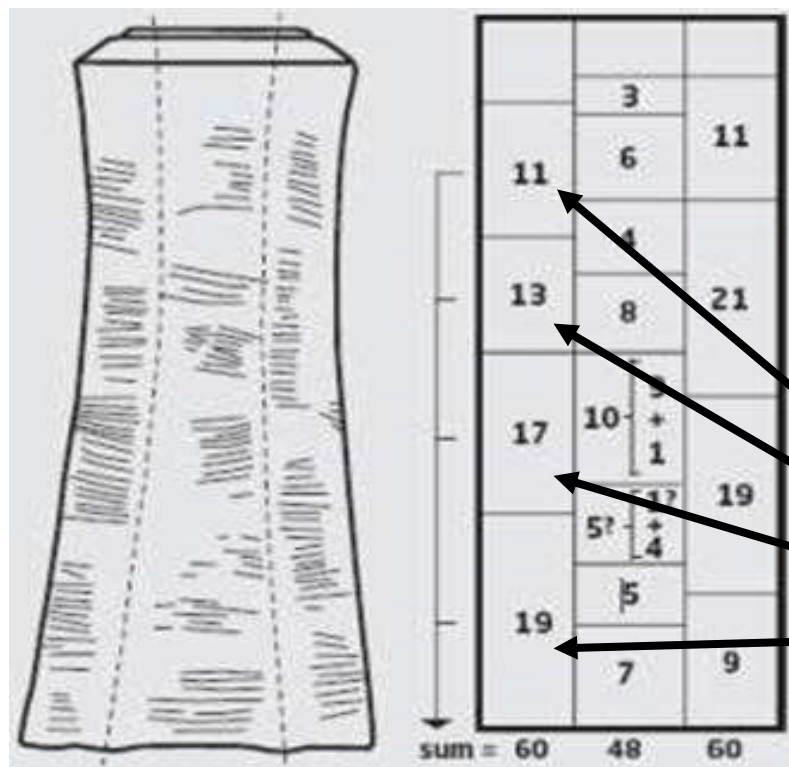
$20 + 1$

$20 - 1$

$10 - 1$



# Talforståelse og regnestrategier



Om at opleve og erkende matematikkens rolle i en **historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng**,

Primtallene mellem  
10 og 20



To typer af regnestrategier

Backup-strategier

og

Retrievel-strategier

Elever i mellembygningen, der udelukkende bruger backupstrategier er med stor sandsynlighed på vej eller allerede i matematikvanskeligheder

# Regnestrategier addition

eks.  $6 + 5 = 11$

## Backup-strategier

1. Tæller til tallene hver for sig og derefter alle
2. Tæller fra et af tallene
3. Tæller fra det største

## Retrievvel-strategier

4. Husker opgaven fra tidligere
5. Ved at  $5 + 5 = 10$  og at 6 er 1 mere end 5:  $10 + 1 = 11$
6. Ved at  $6 + 6 = 12$  og at 5 er 1 mindre end 6:  $6 + 5 = 11$
7. Ved at  $6 + 4 = 10$  (tiervenner) og 5 er 1 mere end 4:  
 $10 + 1 = 11$

## Regnestrategier addition

$$6 + 5 = 11$$

$$16 + 5 =$$

$$106 + 5 =$$

$$116 + 5 =$$

Hvilke af de 7 regnestrategier fra tidligere kan bruges her?

## Regnestrategier addition

$$6 + 5 = 11$$

1 mere eller 1 mindre

$$16 + 5 = 21$$

10 mere

$$106 + 5 =$$

$$116 + 5 =$$

## Regnestrategier addition

$6 + 5 = 11$	1 mere eller 1 mindre
$16 + 5 = 21$	10 mere
$106 + 5 = 111$	100 mere
$116 + 5 =$	

## Regnestrategier addition

$6 + 5 = 11$	1 mere eller 1 mindre
$16 + 5 = 21$	10 mere
$106 + 5 = 111$	100 mere
$116 + 5 = 121$	110 mere



Kan lommeregneren bruges til udvikling af talforståelse og regnestrategier?

# Lommeregner og regneark er glimrende redskaber til udvikling af talforståelse og regnestrategier

Eks.:

Brug lommeregneren til opgaverne:

$$10 + 1 =$$

$$10 + 2 =$$

$$10 + 3 =$$

$$10 + 4 =$$

$$10 + 6 =$$

$$10 + 9 =$$

Eks.:

Brug lommeregneren til opgaverne:

$$10 + 1 = 11$$

$$10 + 2 = 12$$

$$10 + 3 = 13$$

$$10 + 4 = 14$$

$$10 + 6 = 16$$

$$10 + 9 = 19$$

Tænk over dine resultater og løs - uden lommeregneren - opgaverne:

$$10 + 5 =$$

$$10 + 7 =$$

$$10 + 8 =$$

Forklar hvordan du nåede frem til dine resultater.

Kan din strategi bruges i andre sammenhænge?

$10 + 1 = 11$	$10 + 0,1 =$
$10 + 2 = 12$	$10 + 0,2 =$
$10 + 3 = 13$	$10 + 0,3 =$
$10 + 4 = 14$	$10 + 0,4 =$
$10 + 6 = 16$	$10 + 0,6 =$
$10 + 9 = 19$	$10 + 0,9 =$

Tænk over dine resultater og løs - uden lommeregneren - opgaverne:

$10 + 5 = 15$	$10 + 0,5 =$
$10 + 7 = 17$	$10 + 0,7 =$
$10 + 8 = 18$	$10 + 0,8 =$

Forklar hvordan du nåede frem til dine resultater.

# Matematiksamtalen som metode

har en del tilfælles med kognitiv guidet instruktion og medieret læringserfaring

## Metoden omhandler fem punkter:

Afdækning af elevens matematiske referencerammer og grundlæggende forståelse

Afdækning og tydeliggørelse af læringspotentialer

Afmærkning af læringsveje

Fjernelse af læringsforhindringer

Bibringelse af tro på at kunne lykkes med matematikken

# Ved at spørge ind til summen af 100 og tallene 1-10 i ordnet rækkefølge

$$\begin{array}{r} 10+ \\ 100 \\ \hline 200 \end{array}$$

$100 + 1 = 101$

$100 + 2 = 102$

$100 + 3 = 103$

$100 + 4 = 104$

$100 + 5 = 105$

$100 + 6 = 106$

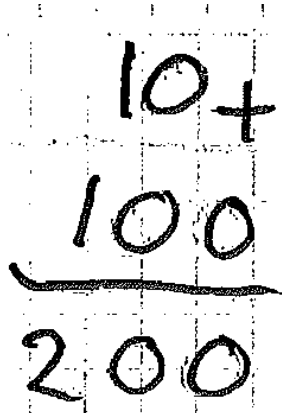
$100 + 7 = 107$

$100 + 8 = 108$

$100 + 9 = 109$

$100 + 10 = 110$

# Ved at spørge ind til summen af 100 og tallene 1-10 i ordnet rækkefølge



Handwritten addition on a grid showing 10 plus 100 equals 200. The numbers are written in a cursive style. A horizontal line is drawn under the 100, and a vertical line is drawn to the left of the 10, forming a partial box around the 10 and 100. The result 200 is written below the line.

$100 + 1 = 101$

$100 + 2 = 102$

$100 + 3 = 103$

$100 + 4 = 104$

$100 + 5 = 105$

$100 + 6 = 106$

$100 + 7 = 107$

$100 + 8 = 108$

$100 + 9 = 109$

$100 + 10 = 110$

Fik eleven mulighed for at reflektere og bruge sin talforståelse.

# Kan strategien bruges i andre sammenhænge?

$$100 + 1 = 101$$

$$100 + 2 = 102$$

$$100 + 3 = 103$$

$$100 + 4 = 104$$

$$100 + 5 = 105$$

$$100 + 6 = 106$$

$$100 + 7 = 107$$

$$100 + 8 = 108$$

$$100 + 9 = 109$$

$$100 + 10 = 110$$



# Kan strategien bruges i andre sammenhænge?

$100 + 1 = 101$

$100 + 2 = 102$

$100 + 3 = 103$

$100 + 4 = 104$

$100 + 5 = 105$

$100 + 6 = 106$

$100 + 7 = 107$

$100 + 8 = 108$

$100 + 9 = 109$

$100 + 10 = 110$

$1000 + 1 =$

$1000 + 2 =$

$1000 + 3 =$

$1000 + 4 =$

$1000 + 5 =$

$1000 + 6 =$

$1000 + 7 =$

$1000 + 8 =$

$1000 + 9 =$

$1000 + 10 =$

# Kan strategien bruges i andre sammenhænge?

$100 + 1 = 101$

$100 + 2 = 102$

$100 + 3 = 103$

$100 + 4 = 104$

$100 + 5 = 105$

$100 + 6 = 106$

$100 + 7 = 107$

$100 + 8 = 108$

$100 + 9 = 109$

$100 + 10 = 110$

$1000 + 1 =$

$1000 + 2 =$

$1000 + 3 =$

$1000 + 4 =$

$1000 + 5 =$

$1000 + 6 =$

$1000 + 7 =$

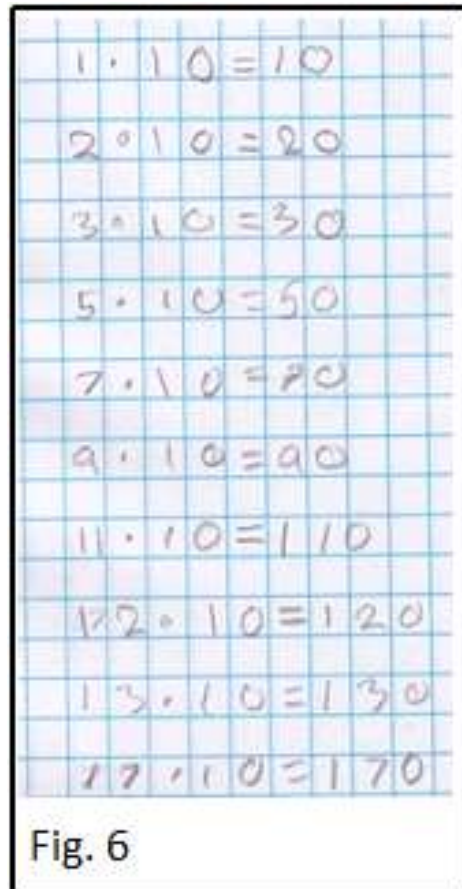
$1000 + 8 =$

$1000 + 9 =$

$1000 + 10 =$

Ved at spørge ind til elevens refleksion og om strategien kan bruges i andre sammenhænge hjælpes eleven til en brugbar læringsvej og til at tro på sig selv.

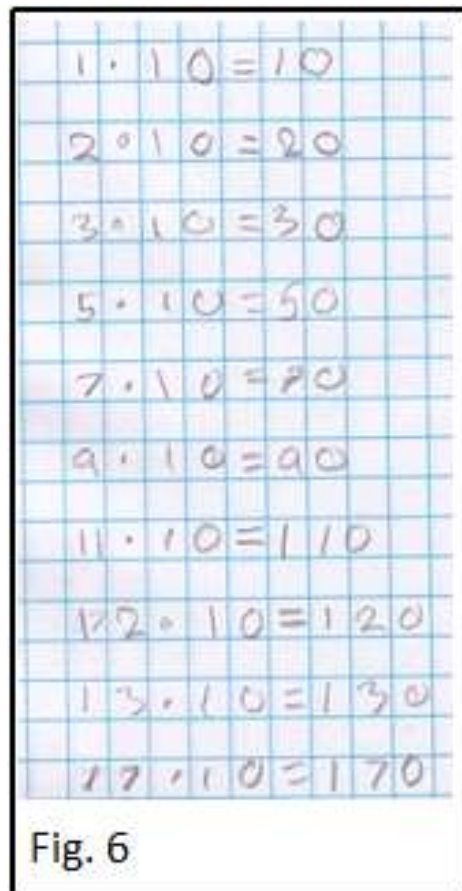
# At gange med 10



$$17 \cdot 10 = ??$$

Instrumentalt: man ganger et tal med 10 ved at sætte et 0 bagefter tallet

# At gange med 10



Medierende tilgang:  
Prøv at løse opgaverne med din lommeregner

$1 \cdot 10 =$

$2 \cdot 10 =$

$3 \cdot 10 =$

$7 \cdot 10 =$

# At gange med 10



Medierende tilgang:

Prøv at løse opgaverne med din lommeregner

$$1 \cdot 10 = 10$$

$$2 \cdot 10 = 20$$

$$3 \cdot 10 = 30$$

$$7 \cdot 10 = 70$$

Løs uden brug af lommeregner:  $17 \cdot 10 =$

Kan du forklare, hvordan du nåede frem til resultatet?

Kan du bruge strategien i andre sammenhænge?

$$0,1 \cdot 10 = 1$$

$$0,2 \cdot 10 = 2$$

$$0,3 \cdot 10 = 3$$

$$0,7 \cdot 10 = 7$$

Løs uden brug af lommeregner:  $1,7 \cdot 10 =$

# Afmærkning af læringsveje

Elevens oplevelse af at matematikken udspringer af konkrete og af hverdagen



Den konkrete matematik, matematikken i omverdenen, og matematikken i hverdagen



Lægger grundlaget for senere at opleve at matematikken kan hjælpe til en bedre hverdag

# Fjernelse af læringsforhindringer

Fig. 7

Fig. 8

Må man skrive kr. bagefter?

$$640:16=$$

Du har 640 1kr. I en pose og du skal dele dem mellem 16 kammerater, der sidder her rundt om bordet.

Eleven havde en opfattelse af, at opgaven var "ren matematik", der ikke havde sammenhæng med konkrete.

# Bibringelse af tro på at kunne lykkes med matematikken

Omfatter en gennemgang af hvad der blev spurgt om og hvad der svaredes.

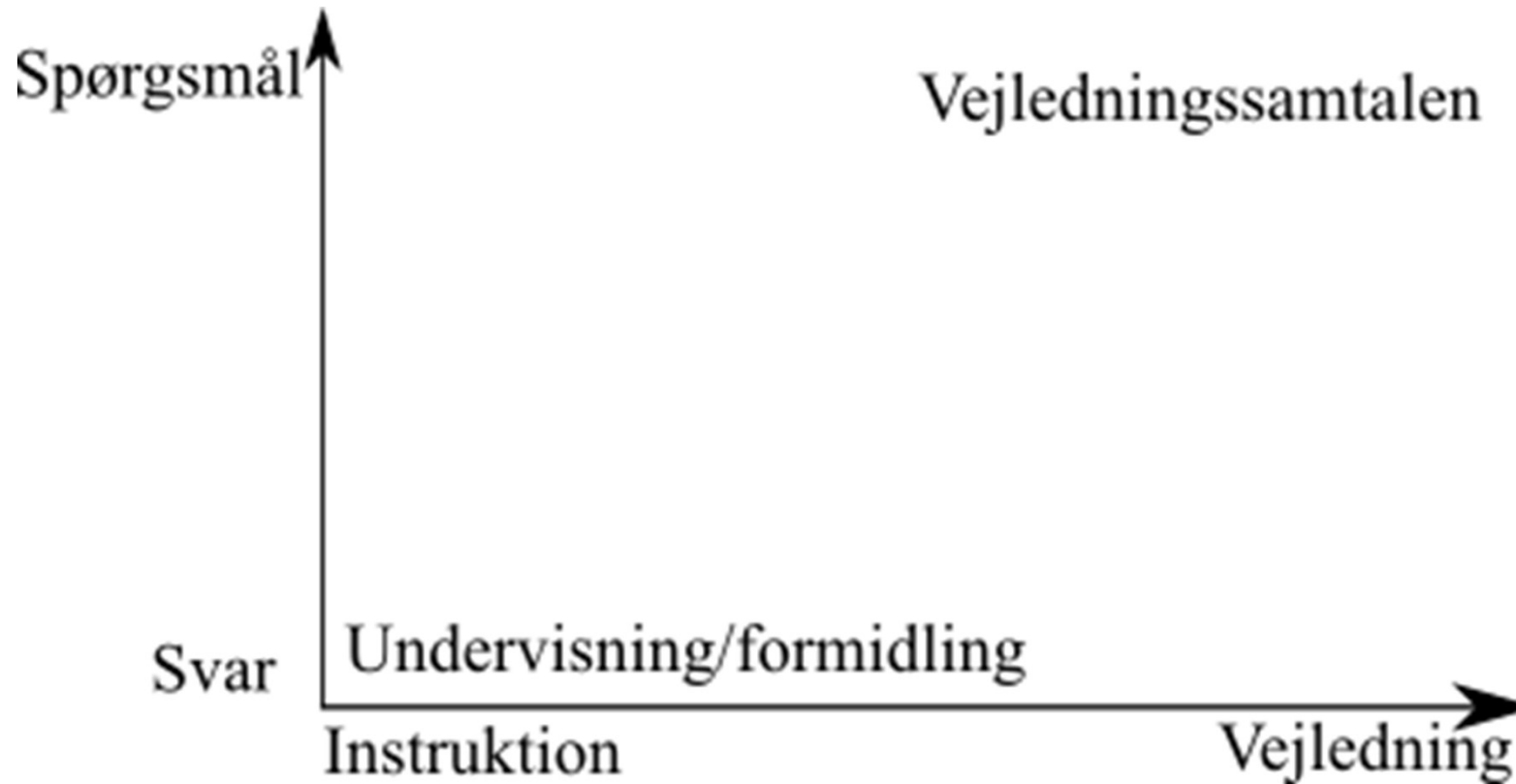
Under samtalen tilkendegives ikke, hvis et svar er forkert, der spørges med enklere tal eller på en anden måde.

Spørgsmålene har til formål at få eleven til at ræsonnere.

Til afslutning gennemgås elevens svar og tænkemåde og svarene bruges som bevis på elevens forståelse.



# Hvordan komme i gang ?



# Begynd med at spørge ind til elevernes regnestrategier

$$2 + 3 = ?$$

Hvordan løste du opgaven ?

"Jeg talte

"Jeg talte fra det største tal"

"Jeg ved det bare"

"Jeg ved at  $2 + 2 = 4$ , så  $2 + 3$  er en mere

"Jeg ved at  $3 + 3 = 6$ , så  $2 + 3$  er en mindre

Behøver du at tælle alle?"

Når  $2+3=5$ , hvad er så  $3+3$ ? PHSA(30)

Når du ved det, hvad er så  $3+3$ ?

Hvad er så  $3+3$ ,  $4+3$ ,  $5+3$ ?

Kan du bruge din metode til andre tal?

I Faaborg Midtfyn kommune gennemfører alle matematiklærere i indskolingene elevsamtaler, hvor elevernes regnestrategier kortlægges, og hvor der efterfølgende gennemføres opsamlingsforløb med de elever, der ikke har udviklet brugbare regnestrategier.

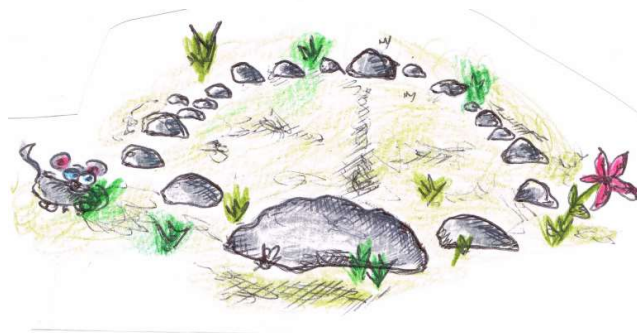
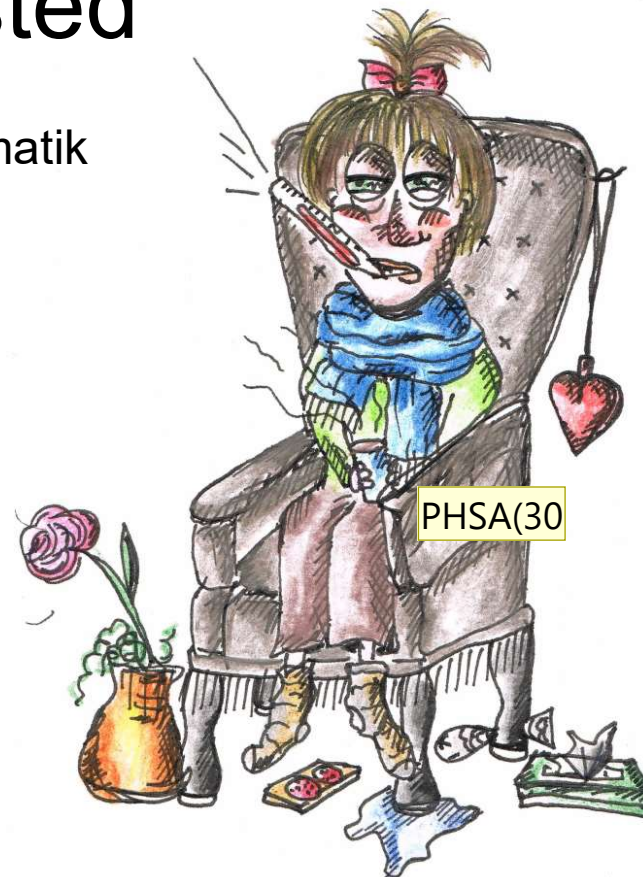
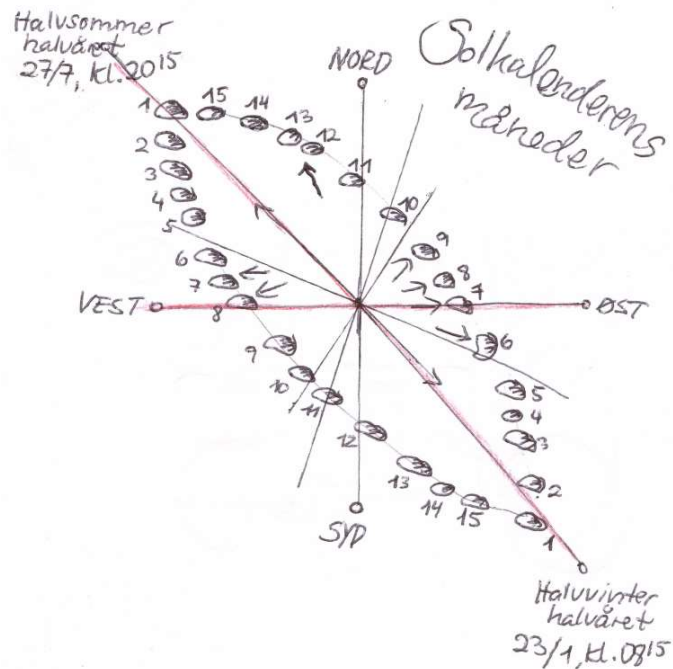
**PHSA(30**

Spørgsmålene tager udgangspunkt i elevens svar og de stiger lidt i sværhedsgrad, men kun så eleven kan følge med.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Tegninger: Rebecca Osted

en af mine tidligere elever, der brugte matematiktimerne på at tegne – og lære matematik



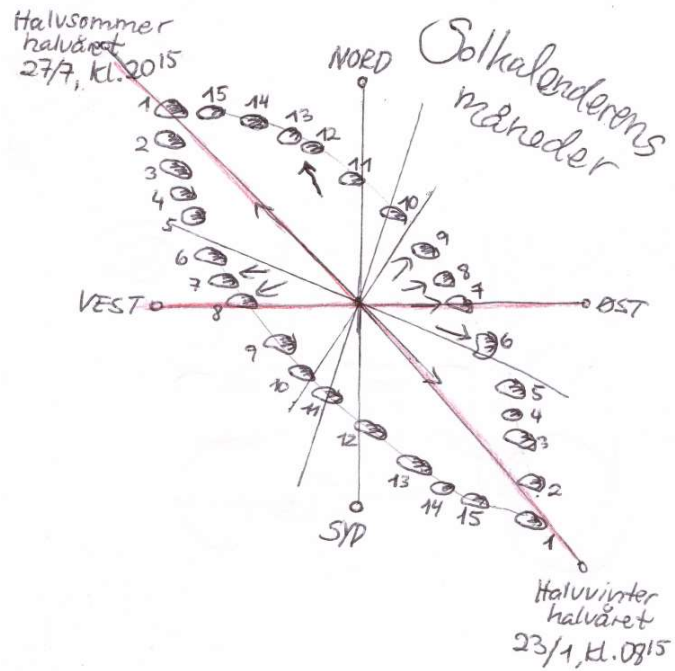
Resten er blandet gods fra hist og her

**PHSA(30**

Spørgsmålene tager udgangspunkt i elevens svar og de stiger lidt i sværhedsgrad, men kun så eleven kan følge med.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020

# Tak for denne gang



**PHSA(30**

Spørgsmålene tager udgangspunkt i elevens svar og de stiger lidt i sværhedsgrad, men kun så eleven kan følge med.

Peter Henrik Stæhr Albrekt (petea); 27-01-2020