


Pernille Pind

MMM
Matematiker
Mormor
Missionær

Forlaget Pind & Bjerre


1



91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Forlaget Pind & Bjerre


2



Hvor mange 1-taller var der?
(Hvor mange gange optrådte cifferet 1?)

Forlaget Pind & Bjerre

3



21

91	92	93	94	95	96	97	98	99	90
81	82	83	84	85	86	87	88	89	80
71	72	73	74	75	76	77	78	79	70
61	62	63	64	65	66	67	68	69	60
51	52	53	54	55	56	57	58	59	50
41	42	43	44	45	46	47	48	49	40
31	32	33	34	35	36	37	38	39	30
21	22	23	24	25	26	27	28	29	20
11	12	13	14	15	16	17	18	19	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Forlaget Pind & Bjerre

4



Hvad giver det konkrete?

Det giver mulighed for **deltagelse**

Det giver mulighed for at **handle**.

Det er **visuelt** – det giver billeder.

Det giver "gratis" **kropslig hukommelse**.

Forlaget Pind & Bjerre

5



Det **er** fint!

I matematik er der mange uudtalte forventninger til, hvad der er "fint".

Den Didaktiske kontrakt.

Den siger, at det fineste er at have det i hovedet!

Tegninger, krop og konkrete materialer er ikke fint.

**DET MÅ VI LAVE OM PÅ!
DET ER FINT!**

Forlaget Pind & Bjerre

6

Krop og kronkreter

Lidt forskning



Forlaget Pind & Bjerre

7

Tre eksperimenter

- *Marie-Pascale Noël*: Den tomme tallinje. og kropslig erkendelse.
- *Susan Goldin-Meadow, Susan Wagner Cook and Zachary A. Mitchell*: Matematisk kropssprog
- *Elida V. Laski, Anna Ermakova, Marina Vasilyeva & Karina Halloran*: Ingen, et eller flere konkrete materialer.



Forlaget Pind & Bjerre


8

Kropslig læring

Marie-Pascale Noël ville se på kropslig læring.

Ikke ilt til hjernen eller leg som motivation.

Det "siede" hun fra i sit forskningsdesign.

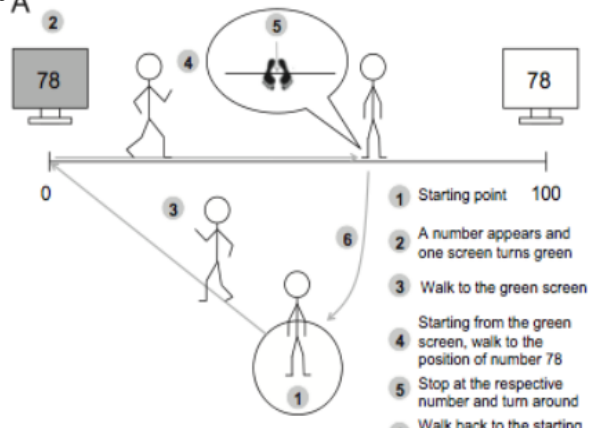


Forlaget Pind & Bjerre


9

Den tomme tallinje

Norsma 2013 Marie-Pascale Noël

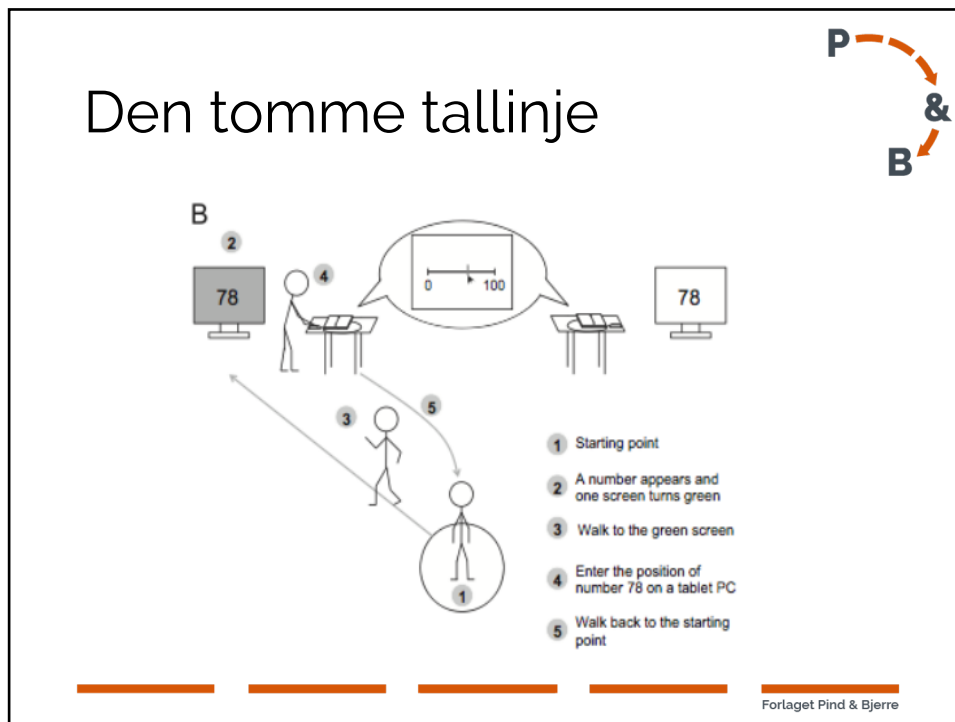


- 1 Starting point 100
- 2 A number appears and one screen turns green
- 3 Walk to the green screen
- 4 Starting from the green screen, walk to the position of number 78
- 5 Stop at the respective number and turn around
- 6 Walk back to the starting point



Forlaget Pind & Bjerre

10



11

Den tomme tallinje

Resultater:

Samme og signifikante stigninger for begge grupper i:

- Mængde sammenligninger
- 10-talssystemforståelse

Større stigning hos den fysiske tallinje-gruppe i:

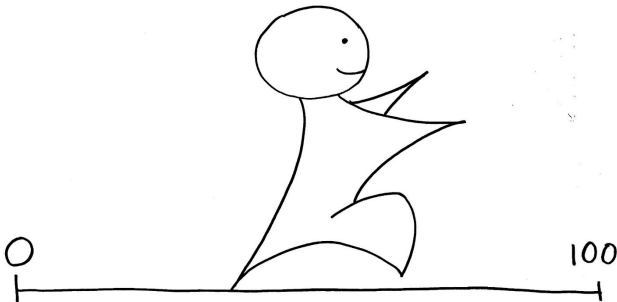
- Placering af tal på tallinje
- Sammenligning af tal
- Addition af 1-cifrede tal

Forlaget Pind & Bjerre

12

Embodied kognition

Den tomme tallinje virker - og bedst med hele kroppen!



Forlaget Pind & Bjerre


13

Den tomme tallinje

Den vigtigste aktivitet, når det drejer sig om talforståelse!

Og den konkrete repræsentation er den bedste 😊

Den relative afstand mellem tallene er i fokus.



Forlaget Pind & Bjerre

14



Den tomme tallinje

Tag en lang elastiksnor, sæt to talkort på. De definerer nu fuldstændigt tallinjen: retning og enhed er givet.

Giv nu eleverne talkort, som de skal placere. Man kan give flere ad gangen, enkeltvis eller små grupper ...

Brug mundtlighed, både at sige tallene højt og snakke strategier.

Forlaget Pind & Bjerre

15



Procentelastik

Især når det handler om procentregning har man brug for den elastiske opfattelse af tallinjen.

Forlaget Pind & Bjerre

16

Kropssprog

Susan Goldin-Meadow, Susan Wagner Cook and Zachary A. Mitchell ville undersøge effekter af gestikulation.

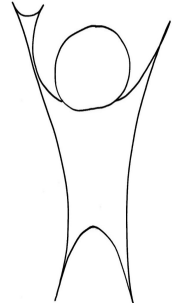


Forlaget Pind & Bjerre



17

Korrekt gestik

$3 + 4 + 8 = _ + 8$



Det skal give det samme på begge sider af lighedstegnet.



Forlaget Pind & Bjerre

18

Forkert gestik

$3 + 4 + 8 = _ + 8$



Det skal give det samme på begge sider af lighedstegnet.

P & B

Forlaget Pind & Bjerre

19

Ingen gestik

$3 + 4 + 8 = _ + 8$

Det skal give det samme på begge sider af lighedstegnet

P & B

Forlaget Pind & Bjerre

20

Resultat?

Korrekt gestik

Forkert gestik

Ingen gestik

1.

2.

3.

Forlaget Pind & Bjerre

21

Kropssprog

Kropssproget kan man også tænke med.

Forlaget Pind & Bjerre

22

P & B

Ingen, et eller flere konkrete

Elida V. Laski, Anna Ermakova, Marina Vasilyeva & Karina Halloran ville undersøge om der var forskel på når eleverne brugte ingen, et eller flere konkrete materialer.

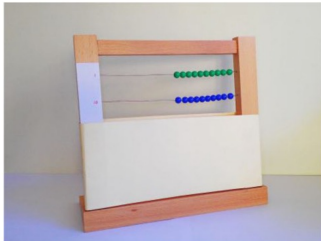
Forlaget Pind & Bjerre

23

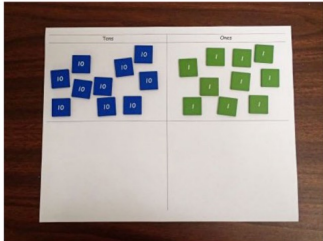
P & B

Ingen, et eller flere konkrete

a) Frame



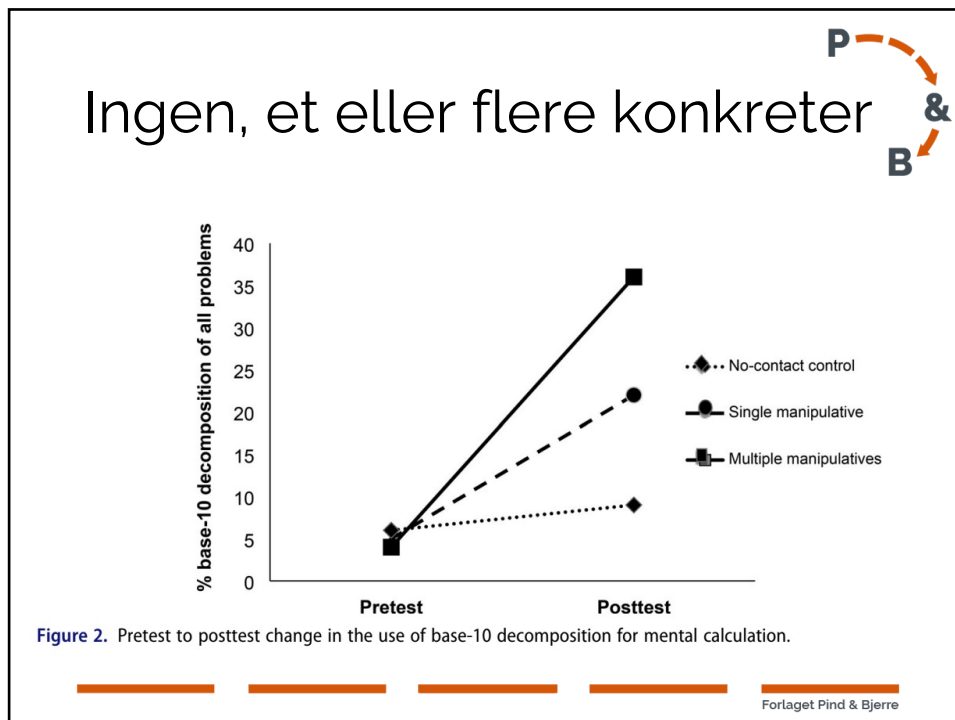
b) Tiles



Brug af 10'er venner (Min tolkning 😊)
 $17+5$, $47+6$

Forlaget Pind & Bjerre

24



25


Ingen, et eller flere konkrete

Resultater:
Et er bedre ingen, to er bedre en et.

"To materialer børnene" var mere generelle i deres beskrivelser end "et materiale børnene".

Forlaget Pind & Bjerre

26



Ingen, et eller flere konkrete

Flere materialer giver anledning til sammenligning, som giver anledning til generalisering, som leder hen mod abstrakt begrebsdannelse.

Forlaget Pind & Bjerre

27




Det konkrete er også i sproget

Man kan i det matematiske sprog finde både det fysiske og det handlende.

Forlaget Pind & Bjerre

28

Matematiske ord - handling




- Lægge sammen
- Trække fra
- Dele
- Halvere
- Flytte fra et tal til et andet ($5+7=6+6$)
- Tegne fx en cirkel (*Det var dengang* 😞)

Forlaget Pind & Bjerre

29

Matematiske ord - fysisk



- En hel
- En kant
- Et hjørne
- Rest
- Toppunkt
- Spids

Forlaget Pind & Bjerre

30

Hjælpemiddel/værktøj/konkret materiale



Hjælpemiddel: Fx briller.

Giver personer med funktionsnedsættelse mulighed for deltagelse.

Værktøj: Fx hammer.

Velegnet til bestemte opgaver.

Konkrete materialer: Fx 1000 centicubes = 1 liter. Konkretiserer det abstrakte.

Forlaget Pind & Bjerre

31

Konkret materiale



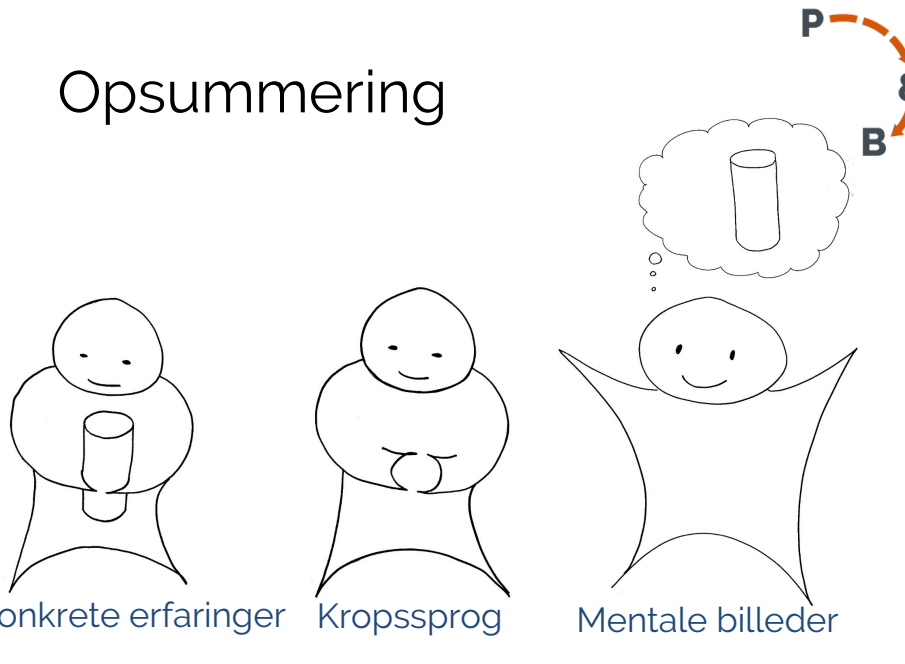
Konkrete materialer har til hensigt at konkretisere begreber og sammenhænge, som ellers er abstrakte.

Målet er at de konkrete repræsentationer på sigt erstattes af mentale repræsentationer.

Forlaget Pind & Bjerre

32

Opsummering



Konkrete erfaringer Kropssprog Mentale billeder

Forlaget Pind & Bjerre

33

Begrænsninger

Der er **ALTID** begrænsninger.

For eksempel begrænsninger i forhold til negative tal, decimaltal, brøker eller irrationale tal.

Vær bevidst om dem. Undersøg dem sammen med eleverne og snak om dem!

Forlaget Pind & Bjerre

34

Begrænsninger

Hvis det konkrete kunne det hele, var der ikke (så meget) brug for matematikken 😊




Forlaget Pind & Bjerre

35

Farer


Det konkrete materiale kan blive svært at slippe.

Det kan hermed blive til et uheldigt hjælpemiddel.



Forlaget Pind & Bjerre

36




Farer

Det konkrete kan blive en "ø" uden sammenhæng til det abstrakte.

Eleverne bliver gode til det konkrete, men ikke til det abstrakte!

Forlaget Pind & Bjerre

37



Ikke alt er lige godt

Brug af de konkrete materialer der kun har få forstyrrende elementer har forskningsmæssigt vist sig bedst.

Det er et minus for dagligdagsobjekter!

Dagligdagsobjekters plus-side er at de giver sammenhæng til verden udenfor skolen.

Forlaget Pind & Bjerre

38



Sammenhæng til det abstrakte &

Det er uhyre vigtige at der skabes sammenhæng mellem det konkrete og det abstrakte!


Gerome Bruner – og senere mange mange andre taler om CPA tilgangen.

Concrete-Pictoral-Abstract

Tegning som en bro mellem det konkrete og det abstrakte.

Forlaget Pind & Bjerre

39




Eksempler

Forlaget Pind & Bjerre

40


Tal



Forlaget Pind & Bjerre

41

Positionssystem opfattelser



- Pladser
- Bunker
- Tæller

Forlaget Pind & Bjerre

42

Pladser

Hver position/plads har en værdi, pladserne har værdier af 10^n :


10.000'ere	1000'ere	100'ere	10'ere	1'ere
------------	----------	---------	--------	-------



Forlaget Pind & Bjerre

43

Talhus



Forlaget Pind & Bjerre

44

Pladsværdikort



900
50
8

P & B

Forlaget Pind & Bjerre

45

Pladser

Fordel:
Tydeligt at anden plads giver anden værdi.

P & B

Forlaget Pind & Bjerre

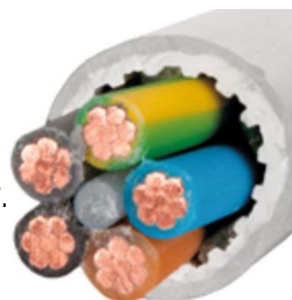
46

Bunke sammen



Vi samler i bunker, som så samles i større bunker, som så samles i større bunker osv.

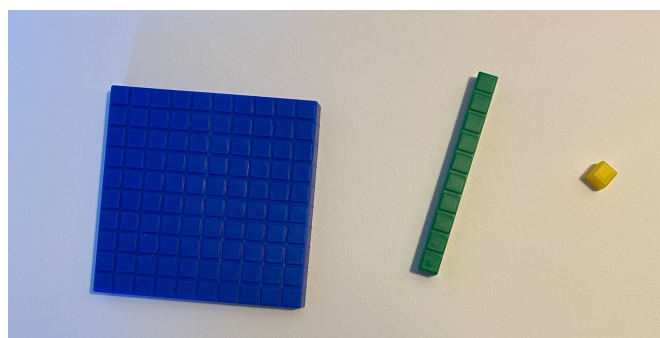
- 10 1'ere samles til 1 10'er.
- 10 10'ere samles til 1 100'er.
- 10 100'ere samles til 1 1000'er.



Forlaget Pind & Bjerre

47

Kuber, stænger og plader



Forlaget Pind & Bjerre

48

Og så videre...

Med større kuber, stænger og plader...



Forlaget Pind & Bjerre

The slide features a large red cube constructed from LEGO bricks, positioned on a white surface. To the right of the cube lies a single yellow Technic pin. The slide is framed by a black border. In the top right corner, there is a logo consisting of the letters 'P', '&', and 'B' arranged in a curve, connected by an orange dashed arrow. At the bottom, there are four orange horizontal bars and the text 'Forlaget Pind & Bjerre'.

49

Bunke sammen

Fordel:
Veksling bliver tydeligt

Forlaget Pind & Bjerre

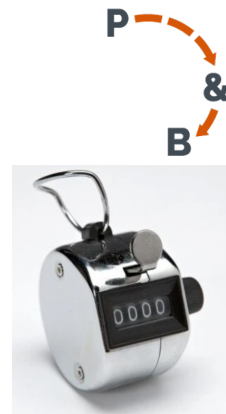
The slide features the text 'Bunke sammen' and 'Fordel: Veksling bliver tydeligt' in a blue font. The slide is framed by a black border. In the top right corner, there is a logo consisting of the letters 'P', '&', and 'B' arranged in a curve, connected by an orange dashed arrow. At the bottom, there are four orange horizontal bars and the text 'Forlaget Pind & Bjerre'.

50

Tæller

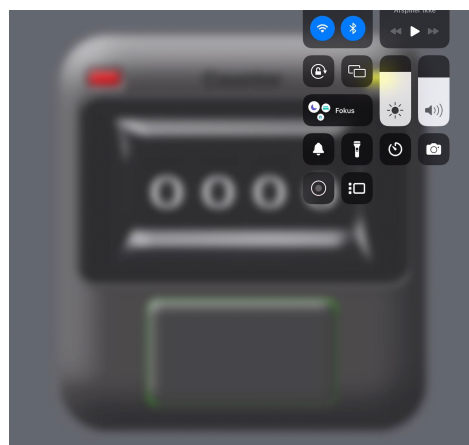
Vi tæller fremad og hver gang vi kommer til 9, skiftes til 0 samtidig med cifferet til venstre skifter 1 op.

Hver runde har 10 cifre.



Forlaget Pind & Bjerre

51





Forlaget Pind & Bjerre

52

Tæller

Fordel:
Tydeligt at skiftet sker efter 9, og ikke efter 10.





Forlaget Pind & Bjerre

53

Brøker

- Cirkler
- Klodser i stænger
- Foldestrimler



Forlaget Pind & Bjerre

54

Brøkcirkler

Fordel:
Helheden kan ses på hver enkelt del.



Forlaget Pind & Bjerre



55

Klodser i stænger

Fordel:
Giver fornemmelse
for at brøker kan
være større end 1.



Forlaget Pind & Bjerre



56

Foldestrimler

P
&
B

Fordel:
Relation til helheden, og andre brøkdeler er med.



Forlaget Pind & Bjerre

57

Brøker i puttepose

P
&
B

Forlaget Pind & Bjerre

58


Tændstikæskeligninger




Forlaget Pind & Bjerre

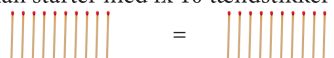
59

3.9. Ligninger med tændstikæsker

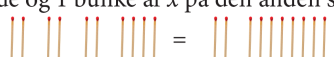


Et eksempel på, hvordan man laver en tændstikæskeligning:

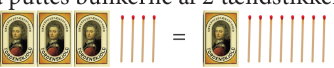
Man starter med fx 10 tændstikker på hver side af et lighedstegn:




Så beslutter man fx at $x = 2$ er løsningen, og deler fx op i 3 bunker af x på den ene side og 1 bunke af x på den anden side:



Så puttes bunkerne af 2 tændstikker i tændstikæsker:



Nu er der en tændstikæskeligning.

$$3x + 4 = x + 8$$


Forlaget Pind & Bjerre

60

3.9. Ligninger med tændstikæsker

Et eksempel på, hvordan man løser en tændstikæskeligning:

Først trækkes en tændstikæske fra på begge sider:

Så trækkes 4 tændstikker fra på begge sider:

Så deles op i to på begge sider:

Og man ser:

Løsningen er altså $x = 2$, der skal være 2 tændstikker i tændstikæskan

P & B

Forlaget Pind & Bjerre

61

Algebraiske fliser

3 typer af brikker: $1, x, x^2$
Både positiv og negativ side.

Fordel (og ulempe☺):
Mere abstrakte end tændstikker!

P & B


Forlaget Pind & Bjerre

62

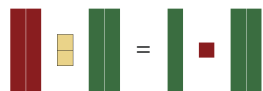
P & B

4.34. Ligninger af 1. grad – 0-metode

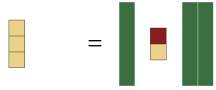
Et eksempel:

$$-2x + 2 = x - 1$$


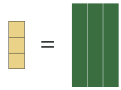
Vi lægger $2x$ til på begge sider af lighedstegnet.



$-2x + 2x = 0$, så de fliser forsvinder. Vi lægger 1 til på begge sider af lighedstegnet.



$-1 + 1 = 0$, så de fliser forsvinder.



Forlaget Pind & Bjerre

63

P & B

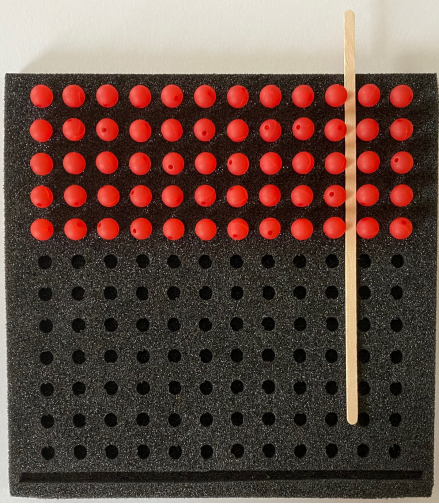
Andengradsligning

Men først en grundlæggende forståelse af gange.

Forlaget Pind & Bjerre

64

Gange på hulplade



En forståelse af gange som areal af et rektangel- eller blot som at tælle noget i rækker og kolonner.


$$5 \cdot 12 = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 2$$

P & B

Forlaget Pind & Bjerre

65

Andengradsligning med algebraiske fliser



P & B

Forlaget Pind & Bjerre

66

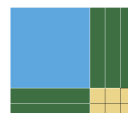
4.27. Faktorisering med to parenteser

Et eksempel: $x^2 + 5x + 6$

Udtrykt med algebraiske fliser ser det således ud:



Puslet til et rektangel bliver det:



Som igen udtrykt algebraisk er:

$$(x + 2) \cdot (x + 3)$$

Forlaget Pind & Bjerre

67

Andengradsligning

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2) \cdot (x + 3) = 0$$

$$(x + 2) = 0 \text{ eller } (x + 3) = 0$$

$$x = -2 \text{ eller } x = -3$$

Forlaget Pind & Bjerre

68

Andengradsligninger

Eksempel:
 $x^2 + 4x + 3 = 0$

Tag brikker:

Placer i rektangel:

$(x+1) \cdot (x+3)$
 $(x+1) \cdot (x+3) = 0$
 $x = -1$ eller $x = -3$

Forlaget Pind & Bjerre

69

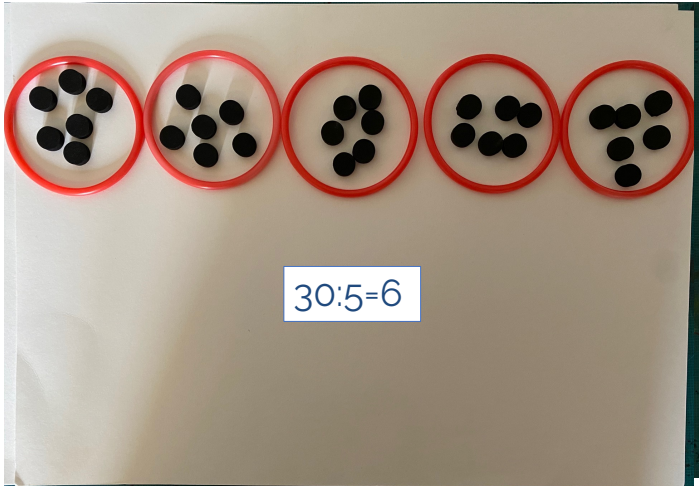
Tekstopgaver med konkrete

Format

Forlaget Pind & Bjerre

70

Division som ligedeling



$30:5=6$

Forlaget Pind & Bjerre

71

Tekstopgaver med konkrete



Der går 32 hamstre i et stort bur.
De skal fordeles i nogle mindre bure. Der skal være 4 i hvert bur.
Hvor mange bure er der brug for?

alt?

Format

Forlaget Pind & Bjerre

72

Division som måling

32:4=8

P & B

Forlaget Pind & Bjerre

73

Tekstopgaver

Konkreter giver handlemuligheder.

Konkreter giver billeder.

Kroppen husker de konkrete bevægelser.

Men, husk sammenhængen til det abstrakte **symbolsprog**– og vejen kan gå via **tegninger!**


P & B

Forlaget Pind & Bjerre

74

Geometri

Cirklen som eksempel



Forlaget Pind & Bjerre

75

Cirkel

Cirklen som figur med konstant bredde.



Forlaget Pind & Bjerre

76

Konstant bredde

Reuleaux trekanten

Forlaget Pind & Bjerre

77

Cirkel

Cirkel som mængden af punkter med samme afstand til punktet, der er cirkelns centrum.

Forlaget Pind & Bjerre

78

Cirkel



P
&
B

Forlaget Pind & Bjerre

79

Geometri med kroppen

Geometri er så helt oplagt et område at anvende konkrete materialer.

Fx

- Lego, Duplo
- Polydron
- Mønsterbrikker
- Passer
- Spejle
- Modellervoks

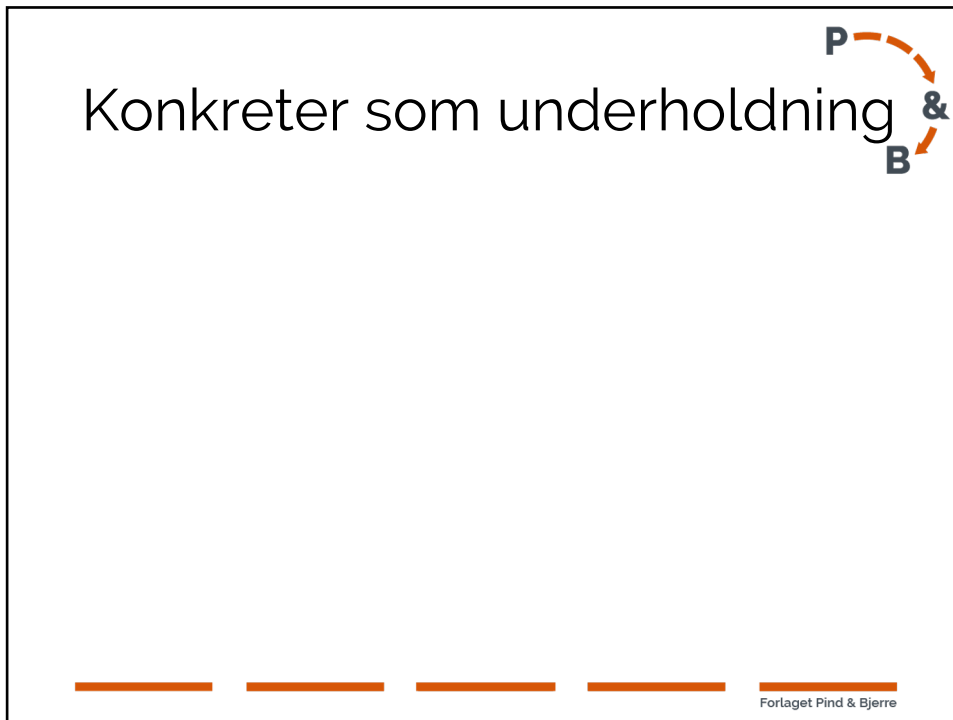
...



P
&
B

Forlaget Pind & Bjerre


80



81



82



Konkreter som underholdning

Fluesmækker-leg

Fluesmækkeren er konkret – men bliver ikke brugt som et konkret materiale.

Det konkretiserer ikke et matematisk begreb.

Det er konkreter som leg. Legen er motivation for læring.

Forlaget Pind & Bjerre

83



De indre billeder er målet

De abstrakte indre billeder er målet med matematikundervisningen,

Men vejen dertil går gennem mange forskellige erfaringer

Og for de fleste går det bedst, når der også er **konkrete fysiske erfaringer.**

Forlaget Pind & Bjerre

84